Zusammenfassung ART

(1) Grundlagen

Spezielle Relativitätstheorie:

- Alle Naturgesetze sind in Inertialsystemen gleich
- für einen inertialen Beobachter sind Raum und Zeit homogen und der Raum ist ein Euklidischer $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ Transformationen zwischen Bezugssystemen entweder

Galilei-Transformation

Bsp. Boost: $t' = t$; $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$

mit $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ const

oder

Lorentz-Transformation (c: Vakuum-Lichtgeschwindigkeit)

Bsp. Boost in x-Richtung

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh\eta \, ct - \sinh\eta \, x \\ -\sinh\eta \, ct + \cosh\eta \, x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit zwischen Bezugssystemen

$$x' = 0 = \text{const} \Rightarrow \frac{x}{t} = c\frac{\sinh\eta}{\cosh\eta} = c\tanh\eta$$

②

Wegen
$$\cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\eta}} ; \quad \sinh \eta = \frac{\tanh \eta}{\sqrt{1-\tanh^2\eta}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} =: \gamma ; \quad = \frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} ct' &= \gamma \left(ct - \frac{v}{c}x\right) \\ x' &= \gamma (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$

Transformation muß reell sein $\Rightarrow |v| < c$

Transformation muß reell sein $\Rightarrow |v| < c$ zur

Geometrische Struktur der SRT-Raum zut

Minkowski: Vierdimensionaler pseudo-Euklidischer Raum mit Fundamentalform ("Pseudometrik")

$$x \cdot y = x^0 \cdot y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = c^2 t_x t_y - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

mit: $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$

Lorentz-Transformationen:

Lineare Abbildungen:

$$x' = \Lambda x ; \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

mit
$$x' \cdot y' = (\Lambda x)^t \hat{g} (\Lambda y) \stackrel{!}{=} x \cdot y = x^t \hat{g} y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^4$

$$\Rightarrow x^t(\Lambda^t \hat{g} \Lambda) y = x^t \hat{g} y$$

$$\Rightarrow \Lambda^t \hat{g} \Lambda = \hat{g} \Rightarrow (\hat{g} \Lambda^t \hat{g}) \Lambda = \mathbb{1}$$

oder $\boxed{\Lambda^{-1} = \hat{g} \Lambda^t \hat{g}}$ ("Pseudo-orthogonale Matrix")

In Komponentenschreibweise

$$\boxed{g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}}$$

Gravitation

Spezifische Eigenschaft: "Schwaches Äquivalenzprinzip"

(a) Jeder Körper bewegt sich unter alleinigem Einfluß der Gravitation bei gleichen Anfangsbedingungen in gleicher Weise.

$\Rightarrow$ (b) In einem hinreichend kleinen Raum-Zeitbereich kann ein Beobachter die Wirkung der Gravitation auf die Bewegung von Probekörpern nicht von der Bewegung dieser Körper in einem beschleunigten Bezugssystem unterscheiden.

$\Rightarrow$ (c) In einem hinreichend kleinen Raum-Zeitbereich bewegen sich Körper relativ zu einem frei fallenden (nicht rotierenden) Bezugssystem kräftefrei $\Rightarrow$ geradlinig gleichförmig.

$\Rightarrow$ (d) In jedem Raum-Zeitpunkt gelten bzgl. der Bewegung von Probekörpern lokal die Gesetze der SRT bzgl. eines lokalen frei fallenden Bezugssystems.

Einstein (1905 – 1915): Starkes Äquivalenzprinzip

Es gilt (d) für alle physikalischen Vorgänge

$\Rightarrow$ Die Naturgesetze müssen invariant unter beliebigen Raum-Zeit-Transformationen sein (für lokale Gesetze!)

(2) Tensoranalysis

In jedem Raumzeitpunkt gilt im lokalen Inertialsystem die Minkowski-Metrik:

$$g^{*\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$$

In einem beliebigen Bezugssystem gilt

$$ds^2 = g_{\rho\sigma}\, dx^\rho\, dx^\sigma = \eta_{\mu\nu}\, dx^{*\mu}\, dx^{*\nu}$$

$$= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^{*\mu}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^{*\nu}}{d x^\sigma}\, dx^\rho\, dx^\sigma$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^{*\mu}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^{*\nu}}{\partial x^\sigma}}$$

Allgemeines Transformationsgesetz

$$\boxed{g'_{\rho'\sigma'} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\rho'}} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\sigma'}}}$$

Kovariante Tensorkomponenten

$$\boxed{T'_{\mu'\nu'\rho'\sigma'\ldots} = T_{\mu\nu\rho\sigma\ldots} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^{\rho'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\sigma'}} \ldots}$$

Kontravariante Vektor- und Tensorkomponenten

$$dx'^{\mu'} = dx^\mu \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu}$$

$$T'^{\mu'\nu'\ldots} = T^{\mu\nu\ldots} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^{\nu'}}{d x^\nu} \ldots$$

Kontraktionen

Tensoren können multipliziert werden, indem über "gegenständige" Indizes summiert wird.

Bsp:

$$T^\mu{}_\nu S^{\nu\rho} = U^{\mu\rho}$$

ist Tensor, wenn S, T Tensoren sind.

Beweis:

$$U'^{\mu'\rho'} = T'^{\mu'}{}_{\nu'} S'^{\nu'\rho'}$$

$$= T^\mu{}_\nu S^{\sigma\rho} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu'}} \frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\sigma}}_{\delta^\nu{}_\sigma} \frac{\partial x'^{\rho'}}{\partial x^\rho}$$

$$= \underbrace{T^\mu{}_\nu S^{\nu\rho}}_{U^{\mu\rho}} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^{\rho'}}{\partial x^\rho}$$

☺

Bewegungsgleichung für Probekörper im Gravitationsfeld

Lokales Inertialsystem

$$\frac{d^2 x^{*\mu}}{ds^{*2}} = 0$$

Trafo auf beliebiges System

$$ds^2 = g_{\rho\sigma}\, dx^\rho\, dx^\sigma = ds^{*2}$$

$$dx^{*\mu'} = \frac{\partial x^{*\mu'}}{\partial x^{\mu}} \, dx^{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{dx^{*\mu'}}{ds^{*}} = \frac{dx^{*\mu'}}{ds} = \frac{\partial x^{*\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\mu}}{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{ds^{*2}} x^{*\mu'} = \frac{d^2}{ds^2} x^{*\mu'} = \frac{\partial x^{*\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \frac{\partial^2 x^{*\mu'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{dx^{\nu}}{ds} \cdot \frac{dx^{\mu}}{ds}$$

$\Rightarrow \frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2}$ ist <u>keine</u> kontravariante Vektorkomponente.

Um Bewegungsgleichung kovariant formulieren zu können, führen wir kovariante Ableitung ein, so daß

$\frac{D^2 x^{\mu}}{Ds^2}$ Vektor ist

und in lokalen Inertialsystem

$$\frac{D^2 x^{*\mu'}}{Ds^2} = \frac{d^2 x^{*\mu'}}{ds^2}$$

gilt. Offenbar muß gelten

$$\frac{D^2 x^{\mu}}{ds^2} = \frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \frac{dx^{\rho}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds}$$

$\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}$: Christophel symbol (<u>kein</u> Tensor!)

Nach obiger Herleitung und Definition von D_s^2 als Skalarop.

$$D_s^2 x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{*\mu'}} \frac{d^2 x^{*\mu'}}{ds^2}$$

$$= \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{*\mu'}} \frac{\partial^2 x^{*\mu'}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{*\mu'}} \frac{\partial^2 x^{*\mu'}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}}$$

Für praktische Rechnungen unhandlich $\Rightarrow$ Suche Ausdruck
<u>direkt</u> im allgemeinen Koordinatensystem.
Direkte Methode kompliziert. Besser ist direkte Herleitung
aus Hamiltonschem Prinzip! Wirkung ist Skalar, d.h. unab-
hängig vom Bezugssystem. Daher:

$$S[x] = -mc\int ds = -mc \int \sqrt{\frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} g_{\rho\sigma}} = \int d\lambda \, L(x, \dot{x})$$

λ: Skalarer Parameter für Weltlinie

Variation ($\delta\lambda = 0$):

$$\delta S = \int d\lambda \left[\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \underbrace{\delta \dot{x}^\mu}_{\frac{d}{d\lambda} \delta x^\mu} \right]$$

$$= \int d\lambda \left[\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$-\frac{1}{mc} \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma g_{\rho\sigma}}}$$

$$-\frac{1}{mc}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\sigma}\,\dot{x}^\sigma\,\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^\varrho \dot{x}^\alpha g_{\varrho\alpha}}}$$

$$-\frac{1}{mc}\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\beta}\,\dot{x}^\beta\dot{x}^\sigma\,\frac{1}{\sqrt{}} + g_{\mu\sigma}\,\ddot{x}^\sigma\,\frac{1}{\sqrt{}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\left(\dot{x}^\varrho\dot{x}^\alpha g_{\varrho\alpha}\right)\frac{1}{\sqrt{}^{\,3}}$$

$$\Rightarrow g_{\mu\sigma}\,\ddot{x}^\sigma + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\beta}\dot{x}^\beta\dot{x}^\sigma - \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\left(\dot{x}^\varrho\dot{x}^\alpha g_{\varrho\alpha}\right)\frac{1}{\sqrt{}^{\,2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varrho\sigma}}{\partial x^\mu}\dot{x}^\varrho\dot{x}^\sigma$$

Jetzt darf man statt allgemeinem λ auch Eigenzeit s nehmen. Dann ist

$$ds^2 = dx^\varrho dx^\alpha g_{\varrho\alpha} \Rightarrow \left(\frac{ds}{ds}\right)^2 = 1 = \frac{dx^\varrho}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds}g_{\varrho\alpha} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow g_{\mu\sigma}\,\ddot{x}^\sigma + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta}\dot{x}^\beta\dot{x}^\alpha - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varrho\sigma}}{\partial x^\mu}\dot{x}^\varrho\dot{x}^\sigma = 0$$

$$= \ddot{x}^\sigma + g^{\mu\sigma}\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta - \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$$

$$= \ddot{x}^\sigma + \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left[\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\right]\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$$

$$\stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{D^2}{ds^2}x^\sigma = \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left[\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\right]\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\sigma\mu}\left[\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\right]}$$

(Christoffelsymbole; affiner Zusammenhang; Konnexion)

Nichtrelativistischer Grenzfall

Für nicht zu große Gravitationsfelder und kleine Geschwindigkeiten sollte die Newtonsche Bewegungsgleichung gelten. Wir können immer für die Wirkung auch die Koordinatenzeit als Parameter wählen:

$$S = -\int dt\, mc \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx_\nu}{dt}}$$

und näherungsweise kartesische Koordinaten einführen. Dann gilt

$$\frac{dx^0}{dt} = c \;;\; \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 \ll c^2 \;;\; g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \cong \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} + h_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}$$

$$= c^2 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 + c^2 h_{00} + 2c h_{0a} \frac{dx^a}{dt} + h_{ab} \frac{dx^a}{dt}\frac{dx^b}{dt}$$

$$\Rightarrow \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}} = c\left[1 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} h_{00} + O\left(h \frac{v}{c}\right)\right]$$

Bis auf Terme höherer Ordnung in $\left(h \frac{v}{c}\right)$ ist also

$$L \cong -mc^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 - \frac{mc^2}{2} h_{00}$$

Daraus folgt die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} = -\frac{mc^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^a} \;;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m \dot{\vec{x}}$$

hier Zeitableitung!

Newtonsches Gravitationspotential

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\ddot{\vec{x}} = -\frac{mc^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^a} \stackrel{!}{=} -m \frac{\partial \varphi}{\partial x^a}$$

$$\Rightarrow h_{00} \cong \frac{2\varphi}{c^2} \Rightarrow ds^2 = dx^\mu dx_\mu \cong (c^2 + 2\varphi)\, dt^2 - d\vec{x}^2$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left[\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} \right]$$ 10

Kovariante Ableitung von Tensorfeldern

Tensorfeld transformiert sich definitionsgemäß

$$T'^{\mu'\nu'}{}_{\alpha'}(x') = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}} T^{\mu\nu}{}_{\alpha}(x)$$

"neue Koordinaten"! "alte Koord."!

Skalares Feld:

$$\varphi'(x') = \varphi(x)$$

Infinitesimale Verschiebung:

$$\varphi'(x'+dx') - \varphi'(x') = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'^{\mu'}} dx'^{\mu'}$$

$$= \varphi(x+dx) - \varphi(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} \quad \text{ist Vektorfeld}}$$

kovariante ~~kontravariante~~ Komponente!

Direkter Beweis

$$T'_{\mu'} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'^{\mu'}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} = T_{\mu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}}$$ ☺

Geht nicht mehr so einfach für Vektorfeld. Der Grund ist, daß man Vektoren an infinitesimal verschiedenen Raum-Zeit-Punkten voneinander abziehen muß. Man muß also Vektor dx^{μ} parallel verschieben. Das geht mit Christoffelsymbolen

Definieren wir

$$T_\mu{}^\nu \doteq D_\mu V^\nu \doteq \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho} V^\rho$$

gilt nämlich

$$D'_\mu V'^{\nu'} = \partial'_\mu V'^{\nu'} + \Gamma'^{\nu'}_{\mu'\rho'} V'^{\rho'}$$

<u>Transformation der Christoffel-Symbole</u>

$$\Gamma'^{\sigma'}_{\alpha'\beta'} = \frac{1}{2} g'^{\mu'\sigma'} \left[\frac{\partial g'_{\mu'\alpha'}}{\partial x'^{\beta'}} + \frac{\partial g_{\mu'\beta'}}{\partial x^{\alpha'}} - \frac{\partial g_{\alpha'\beta'}}{\partial x^{\mu'}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^{\sigma'}}{\partial x^\delta} \left[\frac{\partial}{\partial x'^{\beta'}} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} g_{\mu\alpha} \right) \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha'}} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} g_{\mu\beta} \right)$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x'^{\mu'}} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} g_{\alpha\beta} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^{\sigma'}}{\partial x^\delta} \left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^{\mu'} \partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} g_{\mu\alpha} \right.$$

$$+ \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'} \partial x'^{\beta'}} g_{\mu\alpha} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta}$$

$$+ \underline{\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^{\alpha'} \partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} g_{\mu\beta}} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^{\beta'} \partial x'^{\alpha'}} g_{\mu\beta}$$

$$+ \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha}$$

$$- \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^{\mu'} \partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\gamma} g_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^{\mu'} \partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\gamma} \cdot g_{\alpha\beta}$$

$$- \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \Big]$$

$$= \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \frac{\partial x'^{\sigma'}}{\partial x^\delta} \Big[\cancel{\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^{\mu'} \partial x'^{\beta'}}} g_{\mu\alpha} \to 1$$

$$+ \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'} \partial x'^{\beta'}} g_{\gamma\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta}$$

$$+ \cancel{\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^{\alpha'} \partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}}} g_{\mu\beta} \to 2$$

$$+ \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^{\beta'} \partial x'^{\alpha'}} g_{\gamma\beta} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha}$$

$$- \cancel{\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^{\mu'} \partial x'^{\alpha'}}} g_{\alpha\beta} \to 2$$

$$- \cancel{\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^{\mu'} \partial x'^{\beta'}}} g_{\alpha\beta} \to 1$$

$$- \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \Big]$$

$$\boxed{\Gamma'^{\sigma'}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x'^{\sigma'}}{\partial x^\delta} \Gamma^\delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^{\alpha'} \partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x'^{\sigma'}}{\partial x^\delta}}$$

$\Rightarrow$ Christoffelsymbol ist kein Tensor

Transformation für kovariante Ableitung

$$D'_{\mu'} V'^{\nu'} = \partial'_{\mu'} V'^{\nu'} + \Gamma'^{\nu'}_{\mu'\rho'} V'^{\rho'}$$

$$\partial'_{\mu'} V'^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\nu} V^\nu\right)$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}}\left[\frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} + V^\nu \frac{\partial^2 x'^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right]$$

$$\Gamma'^{\nu'}_{\mu'\rho'} V'^{\rho'} = \left(\frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^{\rho'}}\Gamma^\nu_{\mu\rho} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^{\mu'}\partial x'^{\rho'}}\frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\mu}\right)\frac{\partial x'^{\rho'}}{\partial x^\nu} V^\nu$$

$$\Rightarrow D'_{\mu'} V'^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}}\frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\nu}\left[\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\rho} V_\nu\right]$$

$$+ V^\nu \underbrace{\left[\frac{\partial^2 x'^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^{\mu'}\partial x'^{\rho'}}\frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^{\rho'}}{\partial x^\nu}\right]}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}}\right] = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\delta^{\nu'}_{\mu'}\right) = 0$$

$$\Rightarrow D'_{\mu'} V'^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}}\frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\nu}\left(D_\mu V^\nu\right)$$

☺

Allgemeinere Tensoren

$$\boxed{\begin{aligned} D_\alpha T^{\mu\nu\rho\ldots} = \partial_\alpha T^{\mu\nu\rho\ldots} &+ \Gamma^\mu_{\alpha\beta} T^{\beta\nu\rho\ldots} \\ &+ \Gamma^\nu_{\alpha\beta} T^{\mu\beta\rho\ldots} \\ &+ \Gamma^\rho_{\alpha\beta} T^{\mu\nu\beta\ldots} \\ &+ \ldots \end{aligned}}$$

Beispiel

$$D_\rho g^{\mu\nu} = \partial_\rho g^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\alpha} g^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\alpha} g^{\mu\alpha}$$

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma \Rightarrow \partial_\rho (g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma}) = 0$$

$$\Rightarrow (\partial_\rho g^{\mu\nu}) g_{\nu\sigma} = - g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\nu\sigma}$$

$$\Rightarrow \partial_\rho g^{\mu\alpha} = - g^{\mu\nu} (\partial_\rho g_{\nu\sigma}) g^{\sigma\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\rho g^{\mu\nu} = - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (\partial_\rho g_{\alpha\beta})}$$

$$D_\rho g^{\mu\nu} = - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \partial_\rho g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\beta} \right) \cdot g^{\alpha\nu} + \frac{1}{2} g^{\nu\beta} \left(\frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\beta} \right) g^{\mu\alpha}$$

$$= - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \cancel{\partial_\rho g_{\alpha\beta}} + \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left(\cancel{\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho}} + \cancel{\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^\beta}} - \cancel{\frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial x^\alpha}} + \cancel{\frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial x^\alpha}} + \cancel{\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho}} - \cancel{\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\beta}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{D_\rho g^{\mu\nu} \equiv 0}$$

Produktregel

$$D_\mu (U^\alpha V^\beta) = (D_\mu U^\alpha) V^\beta + U^\alpha D_\mu V^\beta$$

Beweis:

$$D_\mu(U^\alpha V^\beta) = \partial_\mu(U^\alpha V^\beta) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U^\nu V^\beta + \Gamma^\beta_{\mu\nu} U^\alpha V^\nu$$

$$= (\partial_\mu U^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U^\nu) V^\beta + U^\alpha (\partial_\mu V^\beta + \Gamma^\beta_{\mu\nu} V^\nu)$$

$$\Rightarrow D_\mu (U^\alpha V^\beta) = (D_\mu U^\alpha) + U^\alpha D_\mu V^\beta$$ ☺

Kovariante Ableitung kovarianter Komponenten

$\varphi = U_\mu V^\mu$ ist Skalarfeld

Wir definieren, daß auch hier die Produktregel gelten soll, d.h.

$$D_\rho \varphi = \partial_\rho \varphi = D_\rho (U_\mu V^\mu) \overset{!}{=} (D_\rho U_\mu) V^\mu + U_\mu D_\rho V^\mu$$

$$= (D_\rho U_\mu) V^\mu + U_\mu (\partial_\rho V^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} V^\sigma)$$

$$= (\partial_\rho U_\mu + \tilde{\Gamma}_{\rho\mu}{}^{\nu} U_\nu) V^\mu + U_\mu (\partial_\rho V^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} V^\sigma)$$

$$= \partial_\rho (U_\mu V^\mu) + \tilde{\Gamma}_{\rho\mu}{}^{\nu} U_\nu V^\mu + \underbrace{\Gamma^\mu_{\rho\sigma} V^\sigma U_\mu}_{\Gamma^\nu_{\rho\mu} U_\nu V^\mu}$$

$$= \partial_\rho \varphi$$

$$\Rightarrow (\tilde{\Gamma}_{\rho\mu}{}^{\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\mu}) U_\nu V^\mu \overset{!}{=} 0$$

Da dies für alle U_ν, V^ν gilt, folgt

$$\tilde{\Gamma}_{\rho\mu}{}^{\nu} = -\Gamma^{\nu}_{\rho\mu}$$

und somit

$$\boxed{D_\rho U_\mu = \partial_\rho U_\mu - \Gamma^{\nu}_{\rho\mu} U_\nu}$$

Parallelverschiebung eines Vektors

Sei $x^\mu(\tau)$ beliebige Kurve und V_ν ein Kovektor. Dann definieren wir die Parallelverschiebung dieses Vektors längs der Kurve durch

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} D_\mu V_\nu = 0$$

oder

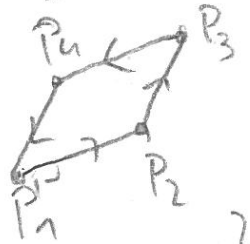
$$\frac{dx^\mu}{d\tau}\left(\partial_\mu V_\nu - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} V_\sigma\right) = 0$$

$$\frac{dV_\nu}{d\tau} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} V_\sigma$$

In Euklidischen/Pseudo-Euklidischen Räumen und konstanten Basisvektoren: $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$ Komponenten ändern sich nicht, aber für krummlinige Koordinaten schon. Wie kann man dann feststellen, ob Raum Euklidisch oder nicht-Euklidisch ist, in dem man nur kovariante Objekte verwendet?

Krümmungstensor

Idee: Parallelverschiebung entlang infinitesimalem geschlossenem Weg ≙ Vektordifferenz am gleichen Punkt



Parallelverschiebung 1→2

$$\delta_{21} V_\nu = \frac{dx_1^\mu}{d\tau_1} D_\mu V_\nu$$

2→3 $$\delta_{32}\delta_{21} V_\nu = \frac{dx_1^\mu}{d\tau_1}\frac{dx_2^\rho}{d\tau_2} D_\rho D_\mu V_\nu$$

Umgekehrter Weg:

$$\delta_{34}\,\delta_{41}\,V_\nu = \frac{dx_1^\mu}{d\tau_1}\,\frac{dx_2^\rho}{d\tau_2}\,D_\mu D_\rho V_\nu$$

Differenz

$$\Delta V_\nu = (\delta_{32}\,\delta_{21} - \delta_{34}\,\delta_{41})\,V_\nu = \frac{dx_1^\mu}{d\tau_1}\,\frac{dx_2^\rho}{d\tau_2}\,(D_\rho D_\mu - D_\mu D_\rho)V_\nu$$

$$= \frac{1}{2}\,d^2F^{\mu\rho}\,(D_\rho D_\mu - D_\mu D_\rho)\,V_\nu$$

$$:= \frac{1}{2}\,R^\alpha{}_{\nu\mu\rho}\,V_\alpha$$

Es gilt

$$D_\rho D_\mu V_\nu = \partial_\rho\,D_\mu V_\nu - \Gamma^\alpha_{\rho\mu} D_\alpha V_\nu - \Gamma^\alpha_{\rho\nu}\,D_\mu V_\alpha$$

$$= \partial_\rho\,(\partial_\mu V_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} V_\alpha)$$
$$- \Gamma^\alpha_{\rho\mu}\,(\partial_\alpha V_\nu - \Gamma^\beta_{\alpha\nu} V_\beta)$$
$$- \Gamma^\alpha_{\rho\nu}\,(\partial_\mu V_\alpha - \Gamma^\beta_{\mu\alpha} V_\beta)$$

$$D_\mu D_\rho V_\nu = \partial_\mu\,(\partial_\rho V_\nu - \Gamma^\alpha_{\rho\nu} V_\alpha)$$
$$- \Gamma^\alpha_{\rho\mu}\,(\partial_\alpha V_\nu - \Gamma^\beta_{\alpha\nu} V_\beta)$$
$$- \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,(\partial_\rho V_\alpha - \Gamma^\beta_{\rho\alpha} V_\beta)$$

$$(D_\rho D_\mu - D_\mu D_\rho)\,V_\nu = \partial_\mu\,(\Gamma^\alpha_{\rho\nu} V_\alpha) - \partial_\rho\,(\Gamma^\alpha_{\mu\nu} V_\alpha)$$
$$+ \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,(\partial_\rho V_\alpha - \Gamma^\beta_{\rho\alpha} V_\beta)$$
$$- \Gamma^\alpha_{\rho\nu}\,(\partial_\mu V_\alpha - \Gamma^\beta_{\mu\alpha} V_\beta)$$

$$(D_\rho D_\mu - D_\mu D_\rho) V_\nu = (\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\rho\nu}) V_\alpha + \Gamma^\alpha_{\rho\nu}\partial_\mu V_\alpha \quad (2)$$
$$- (\partial_\rho \Gamma^\alpha_{\mu\nu}) V_\alpha - \cancel{\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\partial_\rho V_\alpha} \quad (2)$$
$$+ \cancel{\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\partial_\rho V_\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\rho\alpha} V_\beta \quad (1)$$
$$- \cancel{\Gamma^\alpha_{\rho\nu}\partial_\mu V_\alpha} + \Gamma^\alpha_{\rho\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha} V_\beta$$

$$= (\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\rho\nu} - \partial_\rho \Gamma^\alpha_{\mu\nu}) V_\alpha$$
$$+ (\Gamma^\beta_{\rho\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta} - \Gamma^\beta_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\rho\beta}) V_\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{R^\alpha{}_{\nu\mu\rho} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\rho\nu} - \partial_\rho \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\rho\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu}}$$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right)$$

$$\partial_\rho \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\rho}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right)$$
$$+ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\partial_\rho \partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu \partial_\rho g_{\beta\nu} - \partial_\beta \partial_\rho g_{\mu\nu}\right)$$

$$\Rightarrow R_{\alpha\nu\mu\rho} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\rho} + \cancel{\partial_\rho \partial_\mu g_{\alpha\nu}} - \partial_\alpha \partial_\mu g_{\rho\nu}\right.$$
$$\left. - \partial_\rho \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \cancel{\partial_\mu \partial_\rho g_{\alpha\nu}} + \partial_\alpha \partial_\rho g_{\mu\nu}\right)$$
$$- g_{\alpha\alpha'}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g^{\alpha'\beta}}{\partial x^\rho}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\partial g^{\alpha'\beta}}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\beta}\right)\right]$$

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}\Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu}\Gamma^\mu_{\beta\gamma}$$ (19)

Die Eigenschaften des Krümmungstensor werden einfacher für kovariante Komponenten:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\alpha'} R^{\alpha'}{}_{\beta\gamma\delta}$$

Wir wollen nun zeigen, daß die zweiten Ableitungen der Metrik, die in den Ableitungen der Christoffelsymbole vorkommen, nur linear auftreten, denn dies wird entscheidend für die Herleitung der Einstein-Hilbert-Gleichung für das Gravitationsfeld.

Es gilt

$$\partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} = \frac{1}{2}\partial_\gamma\left[g^{\alpha\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\delta} + \frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\mu}\right)\right]$$

$$= (\partial_\gamma g^{\alpha\mu})\, g_{\mu\nu}\, \Gamma^\nu_{\beta\delta}$$
$$+ \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(\partial_\gamma\partial_\delta g_{\mu\beta} + \partial_\gamma\partial_\beta g_{\mu\delta} - \partial_\gamma\partial_\mu g_{\beta\delta}\right)$$

Die Symmetrieeigenschaften werden durchsichtiger, wenn wir die Ableitung von $g^{\alpha\mu}$ durch Christophelsymbole ausdrücken:

Wegen (s. S. 14-15):

$$D_\gamma g^{\alpha\mu} = 0 \Rightarrow \partial_\gamma g^{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\gamma\nu} g^{\nu\mu} + \Gamma^\mu_{\gamma\nu} g^{\alpha\nu}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\gamma g^{\alpha\mu} = -\Gamma^\alpha_{\gamma\varsigma} g^{\varsigma\mu} - \Gamma^\mu_{\gamma\varsigma} g^{\alpha\varsigma}}$$

$$\Rightarrow \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} = -\Gamma^\alpha_{\gamma\varsigma}\Gamma^\varsigma_{\beta\delta} - \Gamma^\mu_{\gamma\varsigma}\Gamma^\nu_{\beta\delta}\, g_{\mu\nu}\, g^{\alpha\varsigma}$$
$$+ \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(\partial_\gamma\partial_\delta g_{\mu\beta} + \partial_\gamma\partial_\beta g_{\mu\delta} - \partial_\gamma\partial_\mu g_{\beta\delta}\right)$$

$$\Rightarrow R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\cancel{\Gamma_{\alpha\gamma\xi}\Gamma^{\xi}_{\beta\delta}}^{(2)} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\nu}_{\beta\delta}\, g_{\mu\nu}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\cancel{\partial_\gamma\partial_\delta g_{\alpha\beta}}^{(1)} + \partial_\gamma\partial_\beta g_{\alpha\delta} - \partial_\alpha\partial_\gamma g_{\beta\delta}\right)$$

$$+ \cancel{\Gamma_{\alpha\delta\xi}\Gamma^{\xi}_{\beta\gamma}}^{(3)} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\delta}\Gamma^{\nu}_{\beta\gamma}\, g_{\mu\nu}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\cancel{\partial_\gamma\partial_\delta g_{\alpha\beta}}^{(1)} + \partial_\delta\partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha\partial_\delta g_{\beta\gamma}\right)$$

$$+ \cancel{\Gamma_{\alpha\gamma\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta}}^{(2)} - \cancel{\Gamma_{\alpha\delta\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}}^{(3)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = {} & \frac{1}{2}\left(\partial_\beta\partial_\gamma g_{\alpha\delta} + \partial_\alpha\partial_\delta g_{\beta\gamma} - \partial_\beta\partial_\delta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha\partial_\gamma g_{\beta\delta}\right) \\ & + g_{\mu\nu}\left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\delta}\Gamma^{\nu}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\nu}_{\beta\delta}\right) \end{aligned}}$$

Daraus liest man die folgenden Symmetrien ab:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

und die Beziehung

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0$$ (zyklische Summe bzgl. der drei letzten Indizes)

Anzahl unabhängiger Komponenten

Man kann für das vordere bzw. hintere Indexpaar jeweils eines von 6 beliebigen Indexpaaren mit verschiedenen Indizes wählen $\left[6 = \binom{4}{2}\right]$. Dabei ist die Reihenfolge gleichgültig. Das ergibt $\binom{6+1}{2} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$ Möglichkeiten. Wegen der Beziehung, daß die obige zyklische Summe verschwindet, hat man noch eine Zusatzeinschränkung

$\Rightarrow$ $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ hat 20 unabhängige Komponenten

(21)

Aus dem Krümmungstensor kann man einen Tensor zweiter Stufe durch Kontraktion gewinnen, der bis auf's Vorzeichen eindeutig ist. Hinsichtlich der Wahl des Vorzeichens gibt es in den Lehrbüchern unterschiedliche Konventionen. Hier folgen wir Landau-Lifschitz Bd. II:

$$R_{\beta\delta} = g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\delta} \quad \text{(Ricci-Tensor)}$$

Weitere Verjüngung liefert den Krümmungsskalar

$$R = R^{\beta}{}_{\beta}$$

Kovariante Integration

In 4D Räumen gibt es im wesentlichen 4 Typen Integrale über s-dimensionale Hyperflächen*. Ziel ist es, Integrale über Tensorfelder zu bilden, die Skalare bilden. Dazu definieren wir verallgemeinerte Kroneckersymbole

$$\left.\delta^{\nu_1\cdots\nu_s}_{\mu_1\cdots\mu_s}\right\} \neq 0 \text{ nur falls } \{\nu_1,\cdots,\nu_s\} = \{\mu_1,\cdots,\mu_s\}$$

die vollständig antisymmetrisch sowohl in den oberen und den unteren Indizes sind und für die $\delta^{\nu_1\cdots\nu_s}_{\mu_1\cdots\mu_s} = 1$ falls $\mu_1 = \nu_1, \mu_2 = \nu_2 \ldots$

$\mu_s = \nu_s$.

Definieren wir nun eine s-dimensionale Hyperfläche durch s skalare Parameter λ^j $(j \in \{1,\cdots,s\})$, dann sind

$$dV^{\mu_1\cdots\mu_s} = \delta^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial\lambda^1} \cdots \frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial\lambda^s} d\lambda^1 \cdots d\lambda^s$$

kontravariante Hyperflächentensorkomponenten

$^* s \in \{1,2,3,4\}$

Zum Beweis bemerken wir, daß

$$dV'^{\mu_1'\cdots\mu_s'} = \delta^{\mu_1'\cdots\mu_s'}_{\nu_1'\cdots\nu_s'} \frac{\partial x'^{\nu_1'}}{\partial\lambda^1}\cdots\frac{\partial x'^{\nu_s'}}{\partial\lambda^s}\, d\lambda^1\cdots d\lambda^s$$

$$= \delta^{\mu_1'\cdots\mu_s'}_{\nu_1'\cdots\nu_s'} \frac{\partial x'^{\nu_1'}}{\partial x^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\nu_s'}}{\partial x^{\nu_s}}\,\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial\lambda_2}\, d\lambda^1\cdots d\lambda^s$$

Andererseits ist

$$dV^{\mu_1\cdots\mu_s}\frac{\partial x'^{\mu_1'}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_s'}}{\partial x^{\mu_s}} = \delta^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s}\frac{\partial x'^{\mu_1'}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_s'}}{\partial x^{\mu_s}}\,\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial\lambda^1}\cdots\frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial\lambda^s}\, d\lambda^1\cdots d\lambda^s$$

$$= \overbrace{\det\left(\frac{\partial x^{\mu_i}}{\partial\lambda^k}\right)}^{s\times s\text{-Matrix!}}\frac{\partial x'^{\mu_1'}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_s'}}{\partial x^{\mu_s}}\, d\lambda^1\cdots d\lambda^s$$

$$= \det\left(\frac{\partial x'^{\mu_i'}}{\partial\lambda^k}\right) d\lambda^1\cdots d\lambda^s$$

$$= \Delta^{\mu_1'\mu_2'\cdots\mu_s'}_{\nu_1'\cdots\nu_s'}\frac{\partial x'^{\nu_1'}}{\partial\lambda^1}\cdots\frac{\partial x'^{\nu_s'}}{\partial\lambda^s} = dV'^{\mu_1'\cdots\mu_s'}$$

Damit lassen sich Hyperflächenintegrale

$$I_s = \int_{G_s} dV^{\mu_1\cdots\mu_s}\, T_{\mu_1\cdots\mu_s}$$

über vollständig antisymmetrische Tensoren $T_{\mu_1\cdots\mu_s}$ definieren.

Stokesscher Integralsatz

Für antisymmetrische Tensoren kann man alternieren die Differential formen definieren, für die kovariante und partielle Ableitungen übereinstimmen.

(a) 1-Formen

Für ein Skalarfeld ist

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi \Rightarrow \text{Vektorfeld}$$

und folglich

$$\int_{G_1} dx^\mu D_\mu \Phi = \int_{G_1} dx^\mu \partial_\mu \Phi = \Phi(x_{Ende}) - \Phi(x_{Anfang})$$

ein Skalar

(b) 2-Form

Für Vektorfeld ist

$$D_\mu V_\nu - D_\nu V_\mu = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} V_\alpha + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} V_\alpha$$

$$= \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$$

Und damit

$$\int_{G_2} dV^{\mu_1\mu_2} (D_{\mu_1} V_{\mu_2} - D_{\mu_2} V_{\mu_1}) = \int_{G_2} dV^{\mu_1\mu_2} (\partial_{\mu_1} V_{\mu_2} - \partial_{\mu_2} V_{\mu_1})$$

$$= \int_{\partial G_2} dx^\mu V_\mu$$

Dabei ist ∂G_2 der Rand von G_2 (Randkurve einer 2D Hyperfläche

(c) 3-Form

Sei $F_{\mu\nu}$ antisymmetrisches Tensorfeld.

Dann ist

$$G_{\rho\mu\nu} := D_\rho F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu}$$

$$= \frac{1}{2!} \delta^{\rho'\mu'\nu'}_{\rho\mu\nu} D_{\rho'} F_{\mu'\nu'}$$

vollständig antisymmetrisiert, und es gilt

$$G_{\rho\mu\nu} = \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu}$$

Beweis Übung. Entsprechend gilt der Stokessche Satz für 3D Hyperflächenintegrale

$$\int_{G_3} dV^{\mu_1\mu_2\mu_3}\, G_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \int_{\partial G_2} dV^{\mu_1\mu_2}\, F_{\mu_1\mu_2}$$

Entsprechend für 4-Formen.

Hodge-Dualisierung

Das Levi-Civita-Symbol

$$\Delta^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu=1,\ \nu=2,\ \rho=3,\ \sigma=4 \\ \text{vollständig antisymmetrisch sonst.} \end{cases}$$

ist kein Tensor, denn es gilt

$$\Delta^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^{\rho'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^{\sigma'}}{\partial x^\sigma} = \Delta^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \cdot \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)$$

Andererseits gilt

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = \Delta^{\mu\nu\rho\sigma}\, g_{\mu 1}\, g_{\nu 2}\, g_{\rho 3}\, g_{\sigma 4}$$

und

$$g' = \det(g'_{\mu'\nu'}) = \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu'}}\, g_{\mu\nu}\right)$$

$$= \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \det g \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)$$

$$= g \left[\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right]^2$$

$$g = g' \left[\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\right]^2$$

Da $\det g < 0$ (warum?), ist also

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\Delta^{\mu\nu\rho\sigma}$$

ein Tensor, denn $\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) = \frac{1}{\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)}$.

$\Rightarrow$ Levi-Civita-Tensor,*

denn $\pm\varepsilon^{\mu_1\dots\mu_4}\frac{\partial x'^{\mu_1'}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_4'}}{\partial x^{\mu_4}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\Delta^{\mu_1'\dots\mu_4'}\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{g'}}\,\Delta^{\mu_1'\dots\mu_4'}$$

Demnach ist

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\sqrt{g}\,\Delta^{\mu\nu\rho\sigma} := \sqrt{g}\,\Delta_{\mu\nu\rho\sigma}$$

mit $\Delta_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\mu'}\eta_{\nu\nu'}\eta_{\rho\rho'}\eta_{\sigma\sigma'}\,\Delta^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = -\Delta^{\mu\nu\rho\sigma}$

Damit ist das Hodge-Dual des Vierer-Hyperflächenelements

$$dV^{(4)} := \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,dV^{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{g}\,d^4x$$

ein (Pseudo-)Skalar und also das Integral

$$I[\Phi] = \int_V dV^{(4)}\,\Phi = \int_V d^4x\,\sqrt{g}\,\Phi$$

ein (Pseudo-)Skalar

---

* Dabei muß man das obere Vorzeichen für $\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) > 0$, das untere für $\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) < 0$ verwenden $\Rightarrow$ Pseudotensor $\Rightarrow$ definiert relative Orientierung zwischen Koordinaten $x'^{\mu'}$ und x^{μ}!

Satz von Gauß

Die kovariante Divergenz eines Vektorfeldes ist.

$$D_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} V^\alpha$$

Nun gilt

$$\Gamma^\mu_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} \right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha}$$

Für die Determinante gilt

$$g = \sum_\alpha g_{(\mu)\alpha} G_{(\mu)\alpha}$$

wobei $G_{\mu\alpha}$ der Minor bzgl. des Matrixelements mit den Indizes $\mu\nu$ ist. Nun gilt wegen des Matrixinversionssatzes

$$G_{\mu\alpha} = g^{\mu\alpha} g$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\alpha}} = G_{\mu\alpha} = g\, g^{\mu\alpha} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\beta}} \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha}$$

$$= g\, g^{\mu\beta} \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = 2 g \Gamma^\mu_{\mu\alpha}$$

$$\Rightarrow D_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} V^\mu$$

$$= \partial_\mu V^\mu + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g})}{\partial x^\mu} V^\mu$$

$$\boxed{D_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \left(\sqrt{g}\, V^\mu \right)}$$

Daraus folgt

$$\int_G dV^{(4)}\, D_\mu V^\mu = \int_G d^4x\, \partial_\mu (\sqrt{-g}\, V^\mu)$$

$$= \int_{\partial G} dF_\mu V^\mu$$

mit dem Flächenelement

$$dF_\mu = -\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\, dV^{\nu\varrho\sigma} = \sqrt{-g}\, \Delta_{\mu\nu\varrho\sigma}\, dV^{\nu\varrho\sigma}$$

Zum Beweis muß man nur den Stokesschen Satz für eine 3-Form anwenden und zwar

$$({}^+V)_{\nu\varrho\sigma} = \varepsilon_{\nu\varrho\sigma\alpha} V^\alpha$$

Die alternierende Differentialform davon ist

$$\frac{1}{3!}\delta^{\mu'\nu'\varrho'\sigma'}_{\mu\nu\varrho\sigma}\partial_{\mu'}({}^+V)_{\nu'\varrho'\sigma'} = \frac{1}{3!}\Delta_{\nu'\varrho'\sigma'\alpha'}\,\delta^{\mu'\nu'\varrho'\sigma'}_{\mu\nu\varrho\sigma}\,\partial_{\mu'}(\sqrt{-g}\, V^{\alpha'})$$

$$= \delta^{\mu'}_{\alpha'}\, \partial_\mu (\sqrt{-g}\, V^{\alpha'})$$

$$= \partial_\mu (\sqrt{-g}\, V^{\alpha'})$$

$\Rightarrow$ Gaußscher Satz $\Leftrightarrow$ Stokesscher Satz für alternierende 3-Form!

Die Feldgleichung der Gravitation

Die Einstein-Hilbert-Wirkung für das freie Gravitationsfeld

Das starke ÄP legt die Annahme nahe, daß die Raum-Zeit-Metrik das Gravitationsfeld beschreiben sollte. Um die entsprechenden Gleichungen zu finden, suchen wir eine entsprechende Lagrange-Dichte für das skalare Wirkungsfunktional

$$A[g_{\mu\nu}] = \int dV^{(4)} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{g}\, \mathcal{L}$$

mit einer skalaren Lagrangedichte.

Wir verlangen, daß

(a) Die Feldgleichungen manifest kovariant sind

$\Rightarrow \mathcal{L}$ muß Skalar von $g_{\mu\nu}$ und seinen Ableitungen sein

(b) Die Feldgleichungen sollen von höchstens zweiter Ordnung in den Ableitungen sein und durch das Hamiltonsche Prinzip

$$\delta A = 0 \quad \text{mit } \delta x^\mu = 0\,;\ \delta g^{\mu\nu} = 0 \text{ im Unendlichen}$$

gegeben sein

Aufgrund des Gaußschen Satzes sind wie in der SRT-Feld-Theorie Lagrange-Dichten, welche sich nur um kovariante (!) Divergenzen unterscheiden

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + D_\mu W^\mu = \mathcal{L} + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)$$

da sich δA damit nicht ändert, weil

$$\int dV^{(4)} D_\mu V^\mu = \int dF^{(3)}_\mu V^\mu$$

Es darf $\mathcal{L}$ also auch zweite Ableitungen der Metrik enthalten, solange diese nur linear auftreten. Das ist für den Krümmungsskalar der Fall. Es gilt nämlich (S. 20):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\partial_\beta \partial_\gamma g_{\alpha\delta} + \partial_\alpha \partial_\delta g_{\beta\gamma} - \partial_\beta \partial_\delta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\beta\delta}\right)$$
$$+ g_{\mu\nu}\left(\Gamma^\mu_{\alpha\delta}\Gamma^\nu_{\beta\gamma} - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}\Gamma^\nu_{\beta\delta}\right),$$

und die Christoffelsymbole enthalten nur 1. Ableitungen.

Nun ist:

$$R = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

d.h. R enthält die zweiten Ableitungen nur linear mit Koeffizienten, die selbst keine Ableitungen enthalten. D.h. wir können als Ansatz für die Wirkung

$$A[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g}\left[-\frac{c^3}{16\pi\gamma} R\right]$$

Das Vorzeichen ist hier willkürlich. Wir werden aber sehen, daß es korrekt gewählt ist, wenn wir die Materie in der Wirkung berücksichtigen.

Um die Feldgleichungen zu gewinnen, müssen wir die Variation nach den $g_{\mu\nu}$ bilden. Dazu schreiben wir den Krümmungstensor zunächst wieder mit Hilfe der Christoffelsymbole (S. 19)

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}\Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu}\Gamma^\mu_{\beta\gamma}$$

$$\Rightarrow R = g^{\beta\delta}\left[\partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\right]$$

Für die Terme mit den Ableitungen schreiben wir

$$\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\delta} = \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \Gamma^\alpha_{\beta\delta}\right) - \Gamma^\alpha_{\beta\delta}\, \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\right)$$

und

$$\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} = \partial_\delta\left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\right) - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\, \partial_\delta\left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\right)$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\, R = {} & \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \Gamma^\alpha_{\beta\delta}\right) - \partial_\delta\left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\right) \\ & + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\, \partial_\delta\left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\right) - \Gamma^\alpha_{\beta\delta}\, \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\right) \\ & + \sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\right]\end{aligned}$$

Wir können also in der Wirkung statt $\sqrt{-g}\, R$ auch*

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\, G = {} & \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\, \partial_\delta\left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\right) - \Gamma^\alpha_{\beta\delta}\, \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\right) \\ & + \sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\left(\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\right)\end{aligned}$$

Dies wollen wir noch etwas vereinfachen. Dazu benötigen wir einige Beziehungen der Christoffel-Symbole:

---

* G ist kein Skalar, aber die Variation von $\int d^4x \sqrt{-g}\, G$ schon, weil $\delta \int d^4x \sqrt{-g}\, G \equiv \delta \int d^4x \sqrt{-g}\, R$ ist, und R ist ein Skalar!

Es gilt

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu}\right)$$

$$\Rightarrow \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(\cancel{\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} - \cancel{\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} \overset{S.26}{=} \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^\beta} = \partial_\beta\left[\ln\sqrt{-g}\right]} \quad (1)$$

und

$$g^{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} g^{\beta\gamma}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} g^{\beta\gamma}\left(2\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu}\right)$$

Nun ist (S. 26)

$$\partial_\mu g = \frac{\partial g}{\partial x^\mu} = g\, g^{\beta\gamma}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu} = -g\, g_{\beta\gamma}\frac{\partial g^{\beta\gamma}}{\partial x^\mu}$$

$$\Rightarrow g^{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\gamma}\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} - \frac{1}{2g} g^{\alpha\mu}\frac{\partial g}{\partial x^\mu}$$

Weiter gilt

$$\partial_\gamma(\underbrace{g_{\beta\mu} g^{\alpha\mu}}_{\delta_\beta^\alpha}) = 0 \Rightarrow (\partial_\gamma g_{\beta\mu})\, g^{\alpha\mu} = -g_{\beta\mu}\,\partial_\gamma g^{\alpha\mu}$$

$$\Rightarrow g^{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\partial_\gamma g^{\alpha\gamma} - \frac{1}{2g}\, g^{\alpha\gamma}\partial_\gamma g$$

$$= -\partial_\gamma g^{\alpha\gamma} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\, g^{\alpha\gamma}\partial_\gamma(\sqrt{-g})$$

$$\boxed{g^{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\gamma\left[\sqrt{-g}\, g^{\alpha\gamma}\right] \quad (2)}$$

Von S. 26 notieren wir noch

$$\partial_\alpha\sqrt{-g} = -\frac{\partial_\alpha g}{2\sqrt{-g}} \overset{S.26}{=} -2g\,\Gamma^{\mu}_{\mu\alpha}\frac{1}{2\sqrt{-g}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\alpha\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\,\Gamma^{\mu}_{\mu\alpha} \quad (3)}$$

$$\Rightarrow (5.30)$$

$$\cancel{\sqrt{-g}\, G = -\sqrt{-g}\,\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}\, g^{\beta\delta}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta}}$$

$$\cancel{-\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}\left[\sqrt{-g}\,\Gamma^{\mu}_{\mu\alpha}\, g^{\beta\delta} + \sqrt{-g}\,\partial_\alpha g^{\beta\delta}\right]}$$

$$\cancel{+\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\mu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right]}$$

$$\cancel{= \sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\left\{\Gamma^{\mu}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\mu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right\}}$$

$$\cancel{-\sqrt{-g}\,\partial_\alpha g^{\beta\delta}\,\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}$$

$$\overset{(5.30)}{\Longrightarrow} \sqrt{-g}\, G = \underset{\substack{\uparrow \\ (2)}}{\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}} \cdot \left[-\sqrt{-g}\, \cancel{g^{\beta\delta}\, \Gamma^{\mu}_{\beta\delta}}\right]$$

$$- \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} \left[\underset{\substack{\uparrow \\ (3)}}{\sqrt{-g}}\, \Gamma^{\mu}_{\mu\alpha}\, g^{\beta\delta} + \partial_\alpha g^{\beta\delta} \sqrt{-g}\right]$$

$$+ \sqrt{-g} \cdot g^{\beta\delta} \left(\cancel{\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}\, \Gamma^{\mu}_{\beta\delta}} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\mu}\, \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right)$$

$$= -\sqrt{-g}\, \Gamma^{\mu}_{\mu\alpha}\, \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}\, g^{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} (\partial_\alpha g^{\beta\delta}) \sqrt{-g}$$

$$- \sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \Gamma^{\alpha}_{\delta\mu}\, \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$$

$$\partial_\alpha g^{\beta\delta} \overset{(5.30)}{=} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\, g^{\mu\delta} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\mu}\, g^{\mu\beta}$$

$$\Rightarrow \sqrt{-g}\, G = -\sqrt{-g}\, \Gamma^{\mu}_{\mu\alpha}\, \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}\, g^{\beta\delta} + 2\, \Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}\, \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\, g^{\beta\delta} \sqrt{-g}$$

$$- \sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \Gamma^{\alpha}_{\delta\mu}\, \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$$

$$\boxed{\sqrt{-g}\, G = \sqrt{-g}\, g^{\beta\delta} \left[\Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}\, \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\mu\alpha}\, \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}\right]}$$

Um die Feldgleichungen zu gewinnen, müssen wir die Variation von $\sqrt{-g}\,G$ bzw. $\sqrt{-g}\,R$

Dazu benötigen wir

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}$$

$$\boxed{\delta\sqrt{-g} \overset{(5.26)}{=} \frac{\sqrt{-g}}{2}\, g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}}$$

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\delta} = \frac{1}{2}\delta\left[g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\delta}} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x^{\beta}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\beta}\left(\partial_\delta g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\delta} - \partial_\beta g_{\mu\delta}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\partial_\delta\,\delta g_{\beta\mu} + \partial_\mu\delta g_{\beta\delta} - \partial_\beta\delta g_{\mu\delta}\right)$$

Es gilt

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma} \Rightarrow \delta g^{\alpha\beta}\,g_{\beta\gamma} + g^{\alpha\delta}\,\delta g_{\delta\gamma} = 0$$

$$\Rightarrow \delta g^{\alpha\beta} = -\delta g_{\delta\gamma}\,g^{\alpha\delta}\,g^{\beta\gamma}$$

$$= -\delta g_{\gamma\delta}\,g^{\alpha\gamma}\,g^{\beta\delta}$$

$$\Rightarrow \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\delta} = -\delta g_{\gamma\rho}\,g^{\alpha\gamma}\,\Gamma^{\rho}_{\mu\delta} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\partial_\delta\delta g_{\beta\mu} + \partial_\mu\delta g_{\beta\delta} - \partial_\beta\delta g_{\mu\delta}\right)$$

Weiter gilt

$$\partial_\delta \delta g_{\beta\mu} = D_\delta \delta g_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\delta\mu} \delta g_{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\delta\beta} \delta g_{\alpha\mu} \quad (1)$$

$$\partial_\mu \delta g_{\beta\delta} = D_\mu \delta g_{\beta\mu} + \overset{(2)}{\Gamma^\alpha_{\mu\beta} \delta g_{\alpha\delta}} + \Gamma^\alpha_{\mu\delta} \delta g_{\alpha\beta}$$

$$\partial_\beta \delta g_{\mu\delta} = D_\beta \delta g_{\mu\delta} + \overset{(2)}{\Gamma^\alpha_{\beta\mu} \delta g_{\alpha\delta}} + \overset{(1)}{\Gamma^\alpha_{\beta\delta} \delta g_{\alpha\mu}}$$

$$\Rightarrow \partial_\delta \delta g_{\beta\mu} + \partial_\mu \delta g_{\beta\delta} - \partial_\beta \delta g_{\mu\delta} = D_\delta \delta g_{\beta\mu} + D_\mu \delta g_{\beta\delta}$$

$$- D_\beta \delta g_{\mu\delta} + \underline{2\Gamma^\nu_{\delta\mu} \delta g_{\nu\beta}}$$

$$\Rightarrow \delta\Gamma^\alpha_{\mu\delta} = \cancel{- \delta g_{\gamma\rho} g^{\alpha\gamma} \Gamma^\rho_{\mu\delta}} \; (1)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (D_\delta g_{\beta\mu} + D_\mu \delta g_{\beta\delta} - D_\beta \delta g_{\mu\delta})$$

$$+ \underbrace{\cancel{\Gamma^\nu_{\delta\mu} \delta g_{\nu\beta} g^{\alpha\beta}}}_{\Gamma^\rho_{\mu\delta} \delta g_{\rho\gamma} g^{\alpha\gamma}} \; (1)$$

$$\Rightarrow \delta\Gamma^\alpha_{\mu\delta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (D_\delta \delta g_{\beta\mu} + D_\mu \delta g_{\beta\delta} - D_\beta \delta g_{\mu\delta})$$

Tensor!

$$\delta R_{\beta\delta} = \delta\left[\partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\mu_{\beta\alpha}\right]$$

Da $\delta\Gamma^\alpha_{\beta\delta}$ Tensor ist, gilt

$$\partial_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} = D_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\beta\delta} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\delta} + \cancel{\Gamma^\mu_{\alpha\delta}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\beta}}$$

$$- \left(D_\delta \delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} + \Gamma^\mu_{\delta\beta}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \cancel{\Gamma^\mu_{\delta\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\beta}}\right)$$

$$- \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\delta\Gamma^\mu_{\beta\delta} + \Gamma^\alpha_{\delta\mu}\delta\Gamma^\mu_{\beta\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta R_{\beta\delta} = D_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\beta\delta} - D_\delta \delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} \quad \text{(Palatini-Identität)}}$$

Betrachten wir nun die Variation.

$$\delta(\sqrt{g}\,R) = \delta(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})$$

$$= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\,\delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{g}\,R_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}$$

$$+ \sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}$$

Den letzten Term können wir mit der Palatini-Identität umformen

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} D_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} D_\nu \delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}$$

$$\underset{(D_\delta g^{\mu\nu} \equiv 0)}{=} D_\alpha\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) - D_\nu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\right)$$

$$= D_\alpha\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\alpha\mu}\Gamma^\beta_{\mu\beta}\right)$$

Damit ist

$$\int d^4x \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\, \delta R_{\mu\nu} = \int dV^{(4)}\, g^{\mu\nu}\, \delta R_{\mu\nu}$$

nach dem Gaußschen Satz ein reines Hyperflächenintegral, dessen Variation verschwindet. Für den zweiten Term in der Variation brauchen wir noch folgendes

$$g_{\mu\nu}\, g^{\nu\rho} = \delta_\mu^{\ \rho} \Rightarrow \delta g_{\mu\nu}\, g^{\nu\rho} + g_{\mu\nu}\, \delta g^{\nu\rho} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta g^{\mu\nu} = -\delta g_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\mu}\, g^{\beta\nu}}$$

$$\Rightarrow \delta(\sqrt{-g}\, R) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\, \delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}\, R_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu}$$

$$\overset{(S.34)}{=} \frac{\sqrt{-g}}{2} R\, g^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} - \sqrt{-g}\, R_{\mu\nu}\, g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}\, \delta g_{\alpha\beta}$$

$$= -\delta g_{\mu\nu} \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g^{\mu\nu} \right] \sqrt{-g}$$

Aus dem Hamiltonschen Prinzip ergeben sich also die Feldgleichungen für das Gravitationsfeld im materiefreien Raum:

$$\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g^{\mu\nu} = 0}$$ (Einstein-Gleichung für das freie Gravitationsfeld)

„Ankopplung" von „Materie"

Um auch die Erzeugung des Gravitationsfeldes aus Materieverteilungen beschreiben zu können, benötigen wir einen entsprechenden Lagrangian für die „Materie".
Als Beispiel betrachten wir das elektromagnetische Feld.*
In der SRT ist die Wirkung für das freie em. Feld (in Heaviside-Lorentz-Einheiten)

$$S_{em}[A] = -\frac{1}{4c}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (\text{SRT!})$$

mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

Das übersetzen wir in die ART, in dem wir das kovariant schreiben:

$$S_{em}[A] = -\frac{1}{4c}\int dV^{(4)}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

mit $F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu \overset{(5.23)}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\Rightarrow S_{em}[A] = -\frac{1}{4c}\int d^4x \sqrt{-g}\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unabh. von}}}{F_{\mu\nu}} F_{\rho\sigma}\, g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}$$

Variation nach $g_{\alpha\beta}$:

$$\Rightarrow \delta\left[\sqrt{-g}\, F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\, g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}\right]$$

$$= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\, F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\left(g^{\mu\rho}\delta g^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma}\delta g^{\mu\rho}\right)$$

$$= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} - \sqrt{-g}\, F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \cdot \left(g^{\mu\rho} g^{\alpha\nu} g^{\beta\sigma} + g^{\nu\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\rho}\right)\delta g_{\alpha\beta}$$

---

* Im Zsh. mit der SRT ist alles, was nicht mit dem Gravitationsfeld zu tun hat, „Materie", also auch em. Strahlung!

$$\Rightarrow \delta\left[\sqrt{g}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] = \frac{\sqrt{g}}{2}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}$$

$$-\sqrt{g}\left(F_{\mu}{}^{\alpha}F^{\mu\beta} + F^{\alpha\sigma}F^{\beta}{}_{\sigma}\right)\delta g_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\sqrt{-g}}{2}\left[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - 4 F^{\alpha}{}_{\mu}F^{\beta\mu}\right]\delta g_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \delta S_{em} = \int dV^{(4)}\, \frac{1}{2c}\underbrace{\left[F^{\alpha}{}_{\mu}F^{\beta\mu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right]}_{-T^{\alpha\beta}}\delta g_{\alpha\beta}$$

$\uparrow$ Energie-Impulstensor

Für das Gravitationsfeld gilt

$$\delta S_{grav} = -\frac{c^3}{16\pi G}\,\delta\int dV^{(4)}\, R$$

$$= +\frac{c^3}{16\pi G}\int dV^{(4)}\left[R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R\, g^{\alpha\beta}\right]$$

$$\Rightarrow \delta S_{tot} = \delta S_{em} + \delta S_{grav} = \int dV^{(4)}\left[\frac{c^3}{16\pi G}\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R g^{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{2c}T^{\alpha\beta}\right]\delta g_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{R^{\alpha\beta} - \frac{R}{2}g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta}}$$

Dies sind die Einsteinschen Feldgleichungen in ihrer Form ohne kosmologische Konstante.
Wir können uns nun auch allgemeinere „Materie"-Lagrange-Dichten vorstellen
Die Variationsableitung der entsprechenden kovarianten Wirkung definieren
wir allgemein als Energie-Impulstensor.

~~Wir kommen nun darauf weiter unten noch zurück. Zunächst befassen wir uns aber mit einigen allgemeinen Eigenschaften der Einsteingleichungen.~~

Zur Eindeutigkeit der Einsteingleichungen

Da die Feldgleichungen konstruktionsgemäß invariant unter Koordinatentransformationen sind, können wir zunächst den Krümmungstensor in einem Punkt in einem lokalen Inertialsystem betrachten.

In diesem gilt

$$g^*_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \left(= \mathrm{diag}\,(1,-1,-1)\right)$$

$$\Gamma^{*\alpha}_{\ \beta\gamma} = 0$$

Wir setzen weiter voraus, daß für den betrachteten Punkt

$$x^{*\mu} = 0$$

ist.

Wir betrachten nun eine Trafo zu neuen Koordinaten in der Form

$$x^\alpha = x^{*\alpha} + \frac{1}{3!} D^\alpha_{\ \beta\gamma\delta}\, x^{*\beta} x^{*\gamma} x^{*\delta}$$

↑ symmetrisch unter Vertauschung dieser 3 Indizes.

Dann ist

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{*\beta}} = \partial^*_\beta x^\alpha = \delta^\alpha_{\ \beta} + \frac{1}{2!} D^\alpha_{\ \beta\gamma\delta}\, x^{*\gamma} x^{*\delta}$$

Im betrachteten Punkt $x^\alpha = 0$ $(\Leftrightarrow x^{*\alpha} = 0)$ folgt daraus

$$\Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma} \overset{S.12}{=} \partial^*_{\beta'} x^\beta\, \partial^*_{\gamma'} x^\gamma\, \frac{\partial x^{*\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\, \Gamma^{*\alpha'}_{\ \beta\gamma} + \frac{\partial^2 x^{*\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{*\mu}}$$

Es folgt, daß

$$g_{\alpha\beta} = g^*_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}\ ; \quad \Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma} = \Gamma^{*\alpha}_{\ \beta\gamma} = 0 \quad \text{für } x^\mu = 0$$

und

$$\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \partial^*_\delta \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma} - D^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \qquad (x^\mu = 0)$$

Setzen wir nun

$$D^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{3}\left(\partial^*_\beta \Gamma^{*\alpha}_{\gamma\delta} + \partial^*_\gamma \Gamma^{*\alpha}_{\delta\beta} + \partial^*_\delta \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}\right)$$

folgt

$$\boxed{\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\gamma\delta} + \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\delta\beta} = 0 \quad (x^\mu = 0)} \qquad (*)$$

Man nennt solche Koordinaten im Punkt $x^\mu = 0$ kanonische Koordinaten.

In einem solchen Koordinatensystem gilt

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \underset{\substack{\uparrow \\ (S.18)}}{\overset{\text{kan}}{=}} \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$$

$$\Rightarrow R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + R^\alpha{}_{\gamma\beta\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} + \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\gamma\delta} - 2\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$$

$$\overset{(*)}{=} -3\, \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$$

Andererseits ist wegen der Definition der Christoffelsymb. bzw. $D_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} \Gamma^\mu_{\beta\gamma} + g_{\beta\mu} \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}$$

$$\Rightarrow \partial_\delta \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \overset{\text{kan}}{=} g_{\alpha\mu}\, \partial_\delta \Gamma^\mu_{\beta\gamma} + g_{\beta\mu}\, \partial_\delta \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}$$

$$= -\frac{1}{3} g_{\alpha\mu}\left(R^\mu{}_{\beta\gamma\delta} + R^\mu{}_{\gamma\beta\delta}\right)$$

$$- \frac{1}{3} g_{\beta\mu}\left(R^\mu{}_{\alpha\gamma\delta} + R^\mu{}_{\gamma\alpha\delta}\right)$$

$$\Rightarrow \partial_\delta \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \overset{\text{kan}}{=} -\frac{1}{3}\left(R_{\alpha\cancel{\beta\gamma\delta}} + R_{\alpha\gamma\beta\delta} + R_{\cancel{\beta\alpha}\gamma\delta} + R_{\beta\gamma\alpha\delta}\right)$$

Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors

$$\overset{\downarrow}{=} -\frac{1}{3}\left(R_{\alpha\gamma\beta\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma}\right)$$

Man kann also in kanonischen Koordinaten die zweiten Ableitungen von $g_{\alpha\beta}$ mit dem Krümmungstensor ausdrücken. Alle aus 1. und 2. Ableitungen gebildeten Tensoren können folglich mit $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ und $g_{\alpha\beta}$ gebildet werden. Das gilt wegen der Transformationseigenschaften von Tensoren offenbar in jedem Koordinatensystem.

Der einzige Skalar, der sich aus dem Metriktensor und den 1. und 2. Ableitungen bilden läßt, wobei die 2. Ableitungen nur linear auftreten, ist also der Ricci-Skalar $R = g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Damit ist der allgemeinste Lagrangian für das Gravitationsfeld

$$\mathcal{L}_g = -\frac{c^3}{16\pi G}\left(R + 2\Lambda\right)$$

mit $\Lambda = \text{const.}$ (Kosmologische Konstante)

Da die Wirkung durch das kovariante Integral gegeben ist, d.h.

$$S_g[g^{\alpha\beta}] = \int dV^{(4)} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g}\, \mathcal{L}_g$$

liefert die kosmologische Konstante bei der Variation nach $g_{\alpha\beta}$ einen nicht verschwindenden Beitrag; denn es gilt ja

$$\delta\sqrt{-g} \overset{5.34}{=} \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

und die Einsteinschen Feldgleichungen verallgemeinern sich zu

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}}$$

Dabei haben wir den „Kosmologischen Term" auf die rechte Seite geschrieben, interpretieren ihn also als Beitrag zum Energie-Impuls-Tensor der Materie („Dunkle Energie"). (43)

Physikalische Eigenschaften der Einsteingleichungen

Wir könnten nun annehmen, daß die Einsteingleichungen die 10 unabhängigen Komponenten von $g_{\mu\nu}$ bei Vorgabe des Energie-Impulstensors vollständig bestimmen würde. Das widerspricht aber der allgemeinen Freiheit, Koordinaten frei zu wählen, so daß wir eigentlich den $g_{\mu\nu}$ noch vier Nebenbedingungen auferlegen können müßten. In Analogie zur E-Dyn nennt man diese Freiheit "Eichinvarianz"). Nun erfüllt der Einstein-Tensor nämlich

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

die Bianchi-Identitäten

$$D_\mu G^{\mu\nu} = 0$$

Beweis:

In einem lokalen Inertialsystem ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$; $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$) gilt

$$D_\mu R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\mu R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\mu\left(\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta}\right)$$

$$\Rightarrow D_\mu R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + D_\gamma R^\alpha{}_{\beta\delta\mu} + D_\delta R^\alpha{}_{\beta\mu\gamma} \stackrel{LI}{=}$$

$$\partial_\mu\left(\cancel{\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}^{(1)} - \cancel{\partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta}}^{(2)}\right)$$
$$+ \partial_\gamma\left(\cancel{\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\delta}}^{(2)} - \cancel{\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}^{(3)}\right)$$
$$+ \partial_\delta\left(\cancel{\partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}^{(3)} - \cancel{\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}^{(1)}\right) = 0$$

Da dies eine Tensoridentität ist, gilt sie in jedem Koordinatensystem:

$$\Rightarrow \boxed{D_\mu R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + D_\gamma R^\alpha{}_{\beta\delta\mu} + D_\delta R^\alpha{}_{\beta\mu\gamma} = 0}$$

Bianchi-Identität für den Krümmungstensor

Kontraktion bzgl. α und γ liefert

$$D_\mu R_{\beta\delta} + D_\alpha R^\alpha{}_{\beta\delta\mu} - D_\delta R_{\beta\mu} = 0$$

Weitere Kontraktion bzgl. β und δ:

$$D_\mu R - 2 D_\alpha R^\alpha{}_\mu = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{D_\alpha R^\alpha{}_\mu = \frac{1}{2} D_\mu R}$$

Bianchi-Identität für Ricci Tensor

In der Tat ist also

$$\begin{aligned} D_\mu G^{\mu\nu} &= D_\mu R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} D_\mu \left(R g^{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{1}{2} D^\nu R - \frac{1}{2} (D_\mu R) g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \cancel{D_\mu} g^{\mu\nu} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß von den 10 Einsteingleichungen in der Tat 4 redundant sind. Außerdem muß zwingend

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

gelten, d.h. es muß notwendig ein lokaler Erhaltungssatz für Energie und Impuls gelten.

Nichtrel. Limes

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)\, u^\mu u^\nu - p\, g^{\mu\nu}$$ (Energie-Impulstensor für ideales Fluid)

ε: Energiedichte im lokalen Ruhsystem der Materie.

u^μ: Vierergeschwindigkeit $\cdot \frac{1}{c} \Rightarrow u_\mu u^\mu = 1$.

p: Druck im lokalen Ruhsystem.

Nichtrelativistischer Limes: $(u^\mu) \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $p \ll \varepsilon$; $\varepsilon = \rho c^2$

$$\Rightarrow T^{00} = \varepsilon = \rho c^2$$

ρ: Ruhmassendichte. Für die Einsteingleichungen gilt

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

Kontraktion über $\mu\nu$: $(g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta^\mu{}_\mu = 4)$

$$-R = \frac{8\pi G}{c^4} T \quad \text{mit } T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}\right)$$

$$\Rightarrow R_{00} \cong \frac{8\pi G}{c^4}\left(\rho c^2 - \frac{1}{2}\rho c^2\right) = \frac{4\pi G}{c^2}\rho$$

Dabei sind wir davon ausgegangen, daß

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

ist mit $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Von S. 9 wissen wir, daß in der NR Näherung $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$ ist, d.h. wir gehen davon aus, daß $|h_{\mu\nu}| \simeq O\left(\frac{\varphi}{c^2}\right) \ll 1$ ist. Dies rechtfertigt auch die obige Näherung bei der Berechnung von $T = T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$ und $T g^{\mu\nu} \simeq T \eta^{\mu\nu}$.

Entsprechend dürfen wir bei der Berechnung des Krümmungs- (45.2)
tensors in der Form auf S. 70. Die in den Christoffelsymbolen quadrati-
schen Terme vernachlässigen. Ebenso bei den Ableitungen von $g_{\alpha\beta}$
die Ableitungen nach $x^0 = ct$ gegenüber den räumlichen Ableitungen

Dann ist

$$R_{\beta\delta} = g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \cong \eta^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma}\left(\partial_\beta \partial_\gamma g_{\alpha\delta} + \partial_\alpha \partial_\delta g_{\beta\gamma} - \partial_\beta \partial_\delta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\beta\delta}\right)$$

$$\Rightarrow R_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma}\left(\partial_0 \partial_\gamma g_{\alpha 0} + \partial_\alpha \partial_0 g_{0\gamma} - \partial_0 \partial_0 g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha \partial_\gamma g_{00}\right)$$

$$\simeq -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma}\partial_\alpha \partial_\gamma g_{00} \simeq \frac{1}{2}\Delta g_{00} = \frac{1}{c^2}\Delta\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = 4\pi G \rho}$$

Dies ist in der Tat die Newtonsche Gleichung für das Gravitations-
potential

Die freie Schwarzschildlösung

Als Anwendung der Einsteingleichung berechnen wir das Gravitationsfeld eines kugelförmigen Körpers als Modell für die Planetenbewegung in unserem Sonnensystem. Wir beschränken uns auf den Außenraum, wo Vakuum angenommen wird. Wir vernachlässigen auch die kosmologische Konstante.

Um der Kugelsymmetrie Rechnung zu tragen verwenden wir für den "Raumschnitt" $t = \text{const}$ räumliche Kugelkoordinaten r, ϑ, φ. Die allgemeinste "kugelsymmetrische" Metrik ist dann durch

$$ds^2 = h(r,t)\,dr^2 + k(r,t)\left[\sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + d\vartheta^2\right] + a(r,t)\,dr\,dt + l(r,t)\,dt^2 \qquad (SS.1)$$

gegeben. Dabei sind h, k, l, a zu bestimmende Funktionen von r, t.

Die Koordinaten r und t können noch beliebig umparametrisiert werden

$$r = r(r', t') \;;\; t = t(r', t') \qquad (SS.2)$$

Offenbar können wir diese willkürlichen Funktionen so wählen, daß

$$a(r,t) \equiv 0 \quad \text{und} \quad k(r,t) = -r^2 \qquad (SS.3)$$

Diese Wahl bedeutet, daß in diesen Koordinaten eine Kreislinie um den Ursprung $r=0$ die Länge $2\pi r$ und eine Kugelschale die Oberfläche $4\pi r^2$ wie in der Euklidischen Geometrie hat.

Hinsichtlich der Zeit können wir immer noch beliebige Umparametrisierungen vornehmen:

$$t = t(t') \qquad (SS.4)$$

Die Metrik vereinfacht sich bis jetzt jedenfalls zu

$$ds^2 = h(r,t)\,dr^2 - r^2\left[\sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + d\vartheta^2\right] + l(r,t)\,dt^2$$

Um der korrekten Signatur (1,3) der Metrik Rechnung zu tragen, verwendet man den Ansatz

$$ds^2 = c^2 \exp\nu \cdot dt^2 - r^2\left[d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right] - \exp\lambda \cdot dr^2 \qquad (55.5)$$

Mit diesem Ansatz gehen wir nun in die freie Einstein-Hilbert-Gleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \qquad (55.6)$$

ein. Durch Kontraktion folgt, daß

$$R^{\mu}{}_{\mu} - \frac{1}{2} R \delta^{\mu}{}_{\mu} = R - \frac{1}{2}\cdot 4R = -R = 0$$

gilt. D.h. wir können die Gleichung auch als

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad (55.6)$$

schreiben. Die Berechnung der $R_{\mu\nu}$ ist nicht sehr illuminierend und bloße Fleißarbeit. Man kann sie auch einem Computeralgebraprogramm überlassen (s. separaten Ausdruck eines Mathematica-Programms).

Wir geben nur die Christoffelsymbole als Zwischenresultat an:

$$\Gamma^{0}_{00} = \frac{1}{2}\partial_t \nu$$

$$\Gamma^{0}_{01} = \Gamma^{0}_{10} = \frac{1}{2}\partial_r \nu$$

$$\Gamma^{0}_{11} = \frac{\exp(\lambda-\nu)\,\partial_t \lambda}{2c^2}$$

$$\Gamma^{1}_{00} = \frac{c^2}{2}\exp(\nu-\lambda)\,\partial_r \nu$$

$$\Gamma^{1}_{01} = \Gamma^{1}_{10} = \frac{1}{2}\partial_t \lambda \, ; \quad \Gamma^{1}_{11} = \frac{1}{2}\partial_r \lambda$$

$$\Gamma^{1}_{22} = -\exp(-\lambda)\, r \, ; \quad \Gamma^{1}_{33} = -\exp(-\lambda)\, r \sin^2\vartheta$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \; ; \; \Gamma^2_{33} = -\cos\vartheta \sin\vartheta$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \; ; \; \Gamma^3_{23} = \cot\vartheta$$

Alle anderen Christoffelsymbole verschwinden.
Für den Ricci-Tensor betrachten wir nacheinander die Komponenten, die zur Lösung von (SS.6) wichtig sind

$$R_{01} = \frac{1}{r}\,\partial_t \lambda \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \lambda(r) \qquad (SS.7)$$

$$\Rightarrow R_{22} = 1 + \frac{1}{2}\exp(-\lambda)\left[r\,\partial_r\lambda - r\,\partial_r\nu - 2\right] \stackrel{!}{=} 0 \qquad (SS.8)$$

$$R_{33} = \frac{1}{2}\sin^2\vartheta \left\{2 + \exp(-\lambda)\left[r\,\partial_r\lambda - r\,\partial_r\nu - 2\right]\right\} \stackrel{!}{=} 0 \qquad (SS.9)$$

Dabei verschwindet R_{33} automatisch, wenn $R_{22} = 0$.

$$R_{00} = \frac{c^2 \exp(\nu - \lambda)}{4r}\left[\partial_r\nu\,(4 - r\,\partial_r\lambda + r\,\partial_r\nu) + 2r\,\partial_r^2\nu\right] \stackrel{!}{=} 0 \qquad (SS.10)$$

$$R_{11} = \frac{1}{4r}\left[\partial_r\lambda\,(4 + r\,\partial_r\nu) - r\left((\partial_r\nu)^2 + 2\,\partial_r^2\nu\right)\right] \stackrel{!}{=} 0 \qquad (SS.11)$$

$$\Rightarrow r\left[(\partial_r\nu)^2 + 2\,\partial_r^2\nu\right] = (\partial_r\lambda)(4 + r\,\partial_r\nu) \qquad (SS.12)$$

$$\Rightarrow \partial_r\nu\,(4 - r\,\partial_r\lambda + r\,\partial_r\nu) = -2r\,\partial_r^2\nu \qquad (SS.13)$$

$$(SS.12) \Rightarrow 2r\,\partial_r^2\nu = \partial_r\lambda\,(4 + r\,\partial_r\nu) - r(\partial_r\nu)^2$$

$$\stackrel{(SS.13)}{=} -\partial_r\nu\,(4 - r\,\partial_r\lambda) - r(\partial_r\nu)^2$$

$$\Rightarrow 4\,\partial_r\lambda + r(\partial_r\lambda)(\partial_r\nu) = -4\,\partial_r\nu + r(\partial_r\nu)(\partial_r\lambda)$$

$$\Rightarrow \partial_r(\lambda + \nu) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(r) + \nu(r,t) = f(t) \quad (55.13)$$

Nun können wir immer noch eine Transformation gemäß (55.4) ohne den Ansatz (55.5) für die Metrik zu verändern, vornehmen
Für die Metrik bedeutet dies

$$g'_{\mu'\nu'}\, dx^{\mu'} dx^{\nu'} = \underbrace{g'_{\mu'\nu'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}}_{g'_{\mu\nu}} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

$$\Rightarrow g_{00} = g'_{00}(\partial_t t')^2$$
$$g_{0a} = g_{a0} = g'_{0a} = g'_{a0} = 0 \quad \text{mit } a,b \in \{1,2,3\}$$
$$g_{ab} = g'_{ab}$$

Eine solche Trafo bedeutet also nur die Addition einer willkürlichen Funktion zu $\nu \Rightarrow \nu = \nu' + f(t)$
Wir können also in (55.13) durch geeignete Wahl der Zeitkoordinate $f(t) \equiv 0$ machen, und daraus folgt

$$\nu(r,t) = \nu(r) = -\lambda(r) \quad (55.14)$$

Aus (55.8) wird damit

$$\exp(\nu)\,[r\,\partial_r \nu + 1] = 1$$

$$\Rightarrow \partial_r[r \exp \nu] = 1$$

$$\Rightarrow r \exp \nu = r - r_s \,; \quad r_s = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \exp \nu = 1 - \frac{r_s}{r} = \exp(-\lambda)$$

$$\Rightarrow$$

Für $r \to \infty$ muß die nichtrel. Näherung gelten, d.h.

$$g_{00} = c^2 \exp \nu \underset{r\to\infty}{\doteq} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2$$

S. 9

mit dem Newtonschen Gravitationspotential

Masse des Körpers („Sonne")

$$\varphi = -\frac{MG}{r} \Rightarrow \boxed{r_s = \frac{2MG}{c^2}} \qquad \text{(SS.15)}$$

Newtonsche Gravitationskonst.

Die gefundene Lösung der Einstein-Hilbert-Gleichungen für das Gravitationsfeld eines radialsymmetrischen Körpers

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right) \qquad \text{(SS.16)}$$

wurde 1916 von Karl Schwarzschild gefunden $\Rightarrow$ Schwartschild-Lösung.

Wir bemerken, daß die Lösung radialsymmetrischer Gravitationsfelder notwendig zu einer statischen Metrik führt. Dies ist analog wie in der E-Dynamik, wo ja auch die Lösung für radialsymmetrische Ladungsverteilungen im Materie-freien Raum auf die statische Coulomblösung führt.

Dabei darf die Materieverteilung auch zeitlich veränderlich sein, solange sie nur radialsymmetrisch bleibt. Auch das ist analog wie in der E-Dynamik.

Es sieht auf den ersten Blick so aus, als läge bei $r = r_s$ (Schwartschildradius) eine Singularität der Raum-Zeit vor. Dies ist aber nicht der Fall, denn es zeigt sich, daß man andere Koordinaten einführen kann, so daß keine Singularität der freien Lösung außer bei $r=0$ vorliegt.

Für gewöhnliche Sterne u. andere Himmelskörper ist der Schwarzschildradius viel kleiner als die Ausdehnung der Körper, so daß keine Schwierigkeiten mit r_s auftreten, weil dort die Lösung mit Materie, also $T^{\mu\nu} \neq 0$ zu suchen ist.

Auch das ist wieder analog zur E-Dynamik: Eine endlich ausgedehnte Ladungsverteilung ergibt keine singulären em. Felder (vgl. das elektrostatische Feld einer homogen geladenen Kugel als Beispiel).

Für die Sonne gilt:

$$M_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}\,; \quad c = 2{,}99792458 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$G = 6{,}67384 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_s^\odot = \frac{2 M_\odot G}{c^2} \approx 2{,}954\,\mathrm{km}}$$

Die freie Schwarzschildlösung

Allgemeinster kugelsymmetrischer Ansatz für die Metrik

In[1]:=
```
q = {t, r, th, ph};
```

In[2]:=
```
g = {{l[r, t], a[r, t] / 2, 0, 0}, {a[r, t] / 2, h[r, t], 0, 0},
   {0, 0, k[r, t], 0}, {0, 0, 0, k[r, t] Sin[th] ^2}};
```

In[3]:=
```
MatrixForm[g]
```

Out[3]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} l[r,t] & \frac{1}{2} a[r,t] & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} a[r,t] & h[r,t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k[r,t] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k[r,t] \operatorname{Sin}[th]^2 \end{pmatrix}$$

In[4]:=
```
dq = {dt, dr, dth, dph};
```

In[5]:=
```
FullSimplify[dq.g.dq]
```

Out[5]= $dr\ dt\ a[r,t] + dr^2\ h[r,t] + dt^2\ l[r,t] + k[r,t] \left(dth^2 + dph^2 \operatorname{Sin}[th]^2\right)$

Durch geeignete Umparametrisierung von r und t können wir die Außerdiagonalelemente zum Verschwinden bringen und k=-r^2 setzen:

In[6]:=
```
h[r_, t_] = -Exp[la[r, t]]; l[r_, t_] = c^2 Exp[nu[r, t]]; a[r_, t_] = 0; k[r_, t_] = -r^2;
```

In[7]:=
```
FullSimplify[dq.g.dq]
```

Out[7]= $-dr^2\ e^{la[r,t]} + c^2\ dt^2\ e^{nu[r,t]} - dth^2\ r^2 - dph^2\ r^2 \operatorname{Sin}[th]^2$

In[8]:=
```
gcontra = Inverse[g];
```

Wir lassen und als nächstes die Christoffelsymbole für den Riemannschen affinen Zusammenhang aus der Definition durch Ableitungen der Metrik ausrechnen:

In[9]:=
```
christ = Table[Table[
    Sum[1 / 2 gcontra[[ii]] [[mi]] (D[g[[mi]] [[ki]], q[[li]]] + D[g[[mi]] [[li]], q[[ki]]] -
        D[g[[ki]] [[li]], q[[mi]]]), {mi, 1, 4}], {ki, 1, 4}, {li, 1, 4}], {ii, 1, 4}];
```

In[10]:=
```
Do[Print[MatrixForm[christ[[ii]]]], {ii, 1, 4}]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,\text{nu}^{(0,1)}[r,t] & \frac{1}{2}\,\text{nu}^{(1,0)}[r,t] & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\,\text{nu}^{(1,0)}[r,t] & \frac{e^{\text{la}[r,t]-\text{nu}[r,t]}\,\text{la}^{(0,1)}[r,t]}{2c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,c^2\,e^{-\text{la}[r,t]+\text{nu}[r,t]}\,\text{nu}^{(1,0)}[r,t] & \frac{1}{2}\,\text{la}^{(0,1)}[r,t] & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\,\text{la}^{(0,1)}[r,t] & \frac{1}{2}\,\text{la}^{(1,0)}[r,t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-\text{la}[r,t]}\,r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-\text{la}[r,t]}\,r\,\text{Sin}[\text{th}]^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{Cos}[\text{th}]\,\text{Sin}[\text{th}] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \text{Cot}[\text{th}] \\ 0 & \frac{1}{r} & \text{Cot}[\text{th}] & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich sofort für den Ricci-Tensor (vollständig kovariante Komponenten)

In[12]:=
```
RicciTen = FullSimplify[
  Table[Sum[D[christ[[li]][[ii]][[ki]], q[[li]]] - D[christ[[li]][[ii]][[li]], q[[ki]]] +
    Sum[christ[[li]][[ii]][[ki]] christ[[mi]][[li]][[mi]] - christ[[mi]][[ii]][[li]]
      christ[[li]][[ki]][[mi]], {mi, 1, 4}], {li, 1, 4}], {ii, 1, 4}, {ki, 1, 4}]]
```

Out[12]=

$$\Big\{\Big\{\frac{1}{4r}\,e^{-\text{la}[r,t]}\Big(-e^{\text{la}[r,t]}\,r\,\big(\text{la}^{(0,1)}[r,t]^2-\text{la}^{(0,1)}[r,t]\,\text{nu}^{(0,1)}[r,t]+2\,\text{la}^{(0,2)}[r,t]\big)+ c^2\,e^{\text{nu}[r,t]}\,\big(\text{nu}^{(1,0)}[r,t]\,\big(4-r\,\text{la}^{(1,0)}[r,t]+r\,\text{nu}^{(1,0)}[r,t]\big)+2\,r\,\text{nu}^{(2,0)}[r,t]\big)\Big),$$
$$\frac{\text{la}^{(0,1)}[r,t]}{r},0,0\Big\},\Big\{\frac{\text{la}^{(0,1)}[r,t]}{r},$$
$$\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{c^2}\,e^{\text{la}[r,t]-\text{nu}[r,t]}\,\big(\text{la}^{(0,1)}[r,t]^2-\text{la}^{(0,1)}[r,t]\,\text{nu}^{(0,1)}[r,t]+2\,\text{la}^{(0,2)}[r,t]\big)+\frac{1}{r}\big(\text{la}^{(1,0)}[r,t]\,\big(4+r\,\text{nu}^{(1,0)}[r,t]\big)-r\,\big(\text{nu}^{(1,0)}[r,t]^2+2\,\text{nu}^{(2,0)}[r,t]\big)\big)\Big),0,0\Big\},$$
$$\Big\{0,0,1+\frac{1}{2}\,e^{-\text{la}[r,t]}\,\big(-2+r\,\text{la}^{(1,0)}[r,t]-r\,\text{nu}^{(1,0)}[r,t]\big),0\Big\},$$
$$\Big\{0,0,0,\frac{1}{2}\,\text{Sin}[\text{th}]^2\,\big(2+e^{-\text{la}[r,t]}\,\big(-2+r\,\text{la}^{(1,0)}[r,t]-r\,\text{nu}^{(1,0)}[r,t]\big)\big)\Big\}\Big\}$$

Die freien Einstein-Hilbert-Gleichungen verlangen, daß dieser Tensor verschwindet. Für die (01)- bzw. (10)-Komponente folgt daraus

In[17]:=
```
la[r_, t_] = la[r];
```

Lassen wir uns die daraus folgenden Vereinfachungen für den Riccitensor anzeigen:

In[18]:=
```
FullSimplify[RicciTen]
```

Out[18]=

$$\Big\{\Big\{\frac{1}{2r}\,c^2\,e^{2\,\text{nu}[r]}\,\big(\text{nu}'[r]\,(2+r\,\text{nu}'[r])+r\,\text{nu}''[r]\big),0,0,0\Big\},$$
$$\Big\{0,-\frac{\text{nu}'[r]\,(2+r\,\text{nu}'[r])+r\,\text{nu}''[r]}{2r},0,0\Big\},\Big\{0,0,1-e^{\text{nu}[r]}\,(1+r\,\text{nu}'[r]),0\Big\},$$
$$\Big\{0,0,0,-\text{Sin}[\text{th}]^2\,\big(-1+e^{\text{nu}[r]}\,(1+r\,\text{nu}'[r])\big)\Big\}\Big\}$$

Durch Kombination der Gleichungen für die (00)- und die (11)-Komponente folgt, daß nu+lambda=f(t) ist. Diese Funktion f(t) können wir durch die noch freigestellte Umparametrisierung der Zeit t=t(t') zum Verschwinden bringen. Es ist also

In[19]:= **nu[r_, t_] = nu[r]; la[r_] = -nu[r];**

Der Ricci–Tensor vereinfacht sich dadurch gleich nochmals drastisch:

In[20]:= **FullSimplify[RicciTen]**

Out[20]= $$\left\{\left\{\frac{1}{2\,r} c^2 e^{2\,\mathrm{nu}[r]} \left(\mathrm{nu}'[r]\,(2 + r\,\mathrm{nu}'[r]) + r\,\mathrm{nu}''[r]\right), 0, 0, 0\right\}, \left\{0, -\frac{\mathrm{nu}'[r]\,(2 + r\,\mathrm{nu}'[r]) + r\,\mathrm{nu}''[r]}{2\,r}, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, 1 - e^{\mathrm{nu}[r]}\,(1 + r\,\mathrm{nu}'[r]), 0\right\}, \left\{0, 0, 0, -\mathrm{Sin}[th]^2 \left(-1 + e^{\mathrm{nu}[r]}\,(1 + r\,\mathrm{nu}'[r])\right)\right\}\right\}$$

Lösen wir weiter zuerst die Gleichung für die (22)–Komponente (dann ist offenbar auch die Gleichung für die (11)–Komponente automatisch erfüllt:

In[21]:= **DSolve[RicciTen[[3]][[3]] == 0, nu[r], r]**

```
Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so
    some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. >>
```

Out[21]= $$\left\{\left\{\mathrm{nu}[r] \to \mathrm{Log}\left[1 - \frac{e^{C[1]}}{r}\right]\right\}\right\}$$

In der üblichen Notation mit dem Schwarzschildradius als Parameter ist

In[22]:= **nu[r_] = Log[1 - rs / r]**

Out[22]= $$\mathrm{Log}\left[1 - \frac{rs}{r}\right]$$

Jetzt müssen wir noch nachprüfen, ob damit auch die verbleibenden Componenten des Ricci–Tensors verschwinden, so daß wir wirklich eine Lösung der Einstein–Hilbertgleichungen für das Vakuum gefunden haben

In[23]:= **FullSimplify[RicciTen]**

Out[23]= {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}

Lassen wir uns also nochmal die endgültige Metrik in der Form des invarianten Viererlängenelements ausgeben

In[24]:= **dq.g.dq**

Out[24]= $$-dth^2\,r^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{rs}{r}} + c^2\,dt^2 \left(1 - \frac{rs}{r}\right) - dph^2\,r^2\,\mathrm{Sin}[th]^2$$

Das war historisch die erste exakte Lösung der freien Einstein–Hilbert–Gleichungen für das Gravitationsfeld im Rahmen der ART und wurde 1916 von Karl Schwarzschild gefunden. Daß die vermeintliche Singularität bei r=rs nur eine Koordinatensingularität ist, sieht man unter anderem daran, daß die Determinante

In[25]:= **Det[g]**

Out[25]= $$-c^2\,r^4\,\mathrm{Sin}[th]^2$$

bei r=rs nicht singulär wird. Die Schwarzschildlösung besitzt nur bei r=0 eine echte Raumzeit–Singularität. Das kann man durch die Koordinatentransformation zu Kruskal–Koordinaten zeigen (vgl. z.B. das Lehrbuch von E. Rebhan, Bd. 6). Auch die Singularität der Metrik entlang der “z–Achse” (entsprechend th=0 bzw. th=Pi) ist nur die übliche Koordinateningularität von Kugelkoordinaten.

Für gewöhnliche Himmelskörper tritt i.a. kein Problem beim Schwarzschildradius auf, weil dieser im Inneren der Körper gilt, wo man die Schwarzschildlösung für die Einstein–Hilbert–Gleichungen mit Materie aufsuchen muß. Ein Beispiel ist die Oppenheimer–Tolman–Volkoff–Lösung für statische Sterne. Dabei ergibt sich als Stabilitätskriterium, daß der Schwarzschildradius im Sterninneren liegen muß (s. wieder Rebhan, Bd. 6). Objekte, für die dies nicht erfüllt ist, sind ein schwarzes Loch, also eine punktförmige Singularität der Raumzeit, die nach dem sog. “no–hair theorem” von Wheeler im Rahmen der reinen ART–Maxwell–Theorie keinerlei Charakteristica als deren fundamentale Paramater (Masse, elektrische Ladung, Drehimpuls) aufweist.