Fläche $R \in \mathbb{R}^2$ im $\mathbb{R}^3$ durch u, v parametrisiert

Tangentialvektoren von R:

$$\vec{r}_u := \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u} \quad ; \quad \vec{r}_v := \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v}$$

Einheitsnormalenvektor an der Stelle (u,v)

$$n(u,v) = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2} \vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u \vec{r}_v)^2}} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Def.: $E := \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = g_{11}$

$F := \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = g_{12} = g_{21}$ $\qquad \det g_{ij} = EG - F^2$

$G := \vec{r}_v \vec{r}_v = g_{22}$

$\rightsquigarrow \sqrt{EG - F^2}$: Flächeninhalt des infinitesimalen Flächenstücks

Zweite Ableitung bilden: $\vec{r}_{uu}, \vec{r}_{uv}, \vec{r}_{vv}$

Diese Vektoren mit der Flächennormale mithilfe des Skalarprodukts in Beziehung setzen

$$\left.\begin{aligned} L &:= \frac{\vec{r}_{uu}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = h_{11} \\ M &:= \frac{\vec{r}_{uv}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = h_{21} = h_{12} \\ N &:= \frac{\vec{r}_{vv}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = h_{22} \end{aligned}\right\} \det h_{ij} = LN - M^2$$

$\rightsquigarrow$ Maß für das auseinanderstreben der Normaleneinheitsvektoren auf dem infinitesimalen Flächenstück

$\rightarrow$ Krümmung ist größer, wenn $LN - M^2$ größer wird und wenn $EG - F^2$ kleiner wird

$$\Rightarrow K := \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad \rightsquigarrow \text{Gaußsche Krümmung}$$

Traktroid ist Rotationsfläche der Traktrix

Drehsymmetrisch bzgl. der z-Achse

$$\rightsquigarrow \vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u)\cos(v) \\ x(u)\sin(v) \\ z(u) \end{pmatrix}$$

Forderung an die Parameterkurve Einheitsgeschwindigkeit

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 1$$

Ableitungen nach u und v:

$$\vec{r}_u = \begin{pmatrix} \frac{dx}{du}\cos v \\ \frac{dx}{du}\sin v \\ \frac{dz}{du} \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{r}_v = \begin{pmatrix} -x\sin v \\ x\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung von E, F, G

$$E = \begin{pmatrix} \frac{dx}{du}\cos v \\ \frac{dx}{du}\sin v \\ \frac{dz}{du} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{dx}{du}\cos v \\ \frac{dx}{du}\sin v \\ \frac{dz}{du} \end{pmatrix} = \left(\frac{dx}{du}\cos v\right)^2 + \left(\frac{dx}{du}\sin v\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2$$

$$= \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 1 \text{ (Einheitsgeschwindigkeit)}$$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{dx}{du}\cos v \\ \frac{dx}{du}\sin v \\ \frac{dz}{du} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x\sin v \\ x\cos v \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$G = \begin{pmatrix} -x\sin v \\ x\cos v \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x\sin v \\ x\cos v \\ 0 \end{pmatrix} = x^2\sin^2 v + x^2\cos^2 v = x^2$$

$$\Rightarrow EG - F^2 = x^2 \quad \Rightarrow \left(\sqrt{EG-F^2} = |x|\right)$$

$$\vec{r}_{uu} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{du^2}\cos v \\ \frac{d^2x}{du^2}\sin v \\ \frac{d^2z}{du^2} \end{pmatrix} ; \vec{r}_{uv} = \begin{pmatrix} -\frac{dx}{du}\sin v \\ \frac{dx}{du}\cos v \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{r}_{vv} = \begin{pmatrix} -x\cos v \\ -x\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} \frac{dx}{du}\cos v \\ \frac{dx}{du}\sin v \\ \frac{dz}{du} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x\sin v \\ x\cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{dz}{du}\cdot x\cos v \\ -\frac{dz}{du}\, x\sin v \\ \frac{dx}{du}\cdot x \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{uu}(\vec{r}_u\times\vec{r}_v) = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{du^2}\cos v \\ \frac{d^2x}{du^2}\sin v \\ \frac{d^2z}{du^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{dz}{du}x\cos v \\ -\frac{dz}{du}x\sin v \\ \frac{dx}{du}\cdot x \end{pmatrix} = \frac{d^2z}{du^2}\frac{dx}{du}x - \frac{d^2x}{du^2}\frac{dz}{du}x$$

$$\Rightarrow L = \frac{d^2z}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{d^2x}{du^2}\frac{dz}{du}$$

$$\vec{r}_{uv}(\vec{r}_u\times\vec{r}_v) = \begin{pmatrix} -\frac{dx}{du}\sin v \\ \frac{dx}{du}\cos v \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{dz}{du}x\cos v \\ -\frac{dz}{du}x\sin v \\ \frac{dx}{du}x \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 0$$

$$\vec{r}_{vv}(\vec{r}_u\times\vec{r}_v) = \begin{pmatrix} -x\cos v \\ -x\sin v \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{dz}{du}x\cos v \\ -\frac{dz}{du}x\sin v \\ \frac{dx}{du}x \end{pmatrix} = \frac{dz}{du}x^2$$

$$\Rightarrow N = \frac{dz}{du}x$$

$$LN - M^2 = \frac{dz}{du}x\left(\frac{d^2z}{du}\frac{dx}{du} - \frac{d^2x}{du^2}\frac{dz}{du}\right)$$

Einheitsgeschwindigkeit: $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 1$

$$\frac{d}{du}\left(\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2\right) = 0$$

$$\cancel{2}\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2} + \cancel{2}\frac{dz}{du}\frac{d^2z}{du^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dz}{du}\frac{d^2z}{du^2} = -\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}} \ *$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dx}{du}\right)^2 \quad **$$

$$LN - M^2 = x \underbrace{\frac{dz}{du}\frac{d^2z}{du^2}}_{*}\frac{dx}{du} - \frac{d^2x}{du^2}\underbrace{\left(\frac{dz}{du}\right)^2}_{**} x$$

$$= -x\frac{dx}{du}\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du} - \frac{d^2x}{du^2}\left(1 - \left(\frac{dx}{du}\right)^2\right)x$$

$$= \cancel{-x\left(\frac{dx}{du}\right)^2\frac{d^2x}{du}} - \frac{d^2x}{du^2} \cancel{+x\left(\frac{dx}{du}\right)^2\frac{d^2x}{du}} = -\frac{d^2x}{du^2} = -x''x$$

$$LN - M^2 = -x''x \quad ; \quad Eg - F^2 = x^2$$

$$K = \frac{LN - M^2}{Eg - F^2} = \frac{-x''x}{x^2} = \frac{-x''}{x} \stackrel{!}{=} \varkappa = \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad x'' + \varkappa x = 0$$

a) $\varkappa = 0 \Rightarrow x'' = 0 \quad \rightarrow x' = \text{const} \equiv c \quad \Rightarrow z' = \sqrt{1-c^2} = \text{const}$

$\Rightarrow$ Parameterkurve ist eine Gerade

Steigung $m = \frac{z'}{x'} = \frac{\sqrt{1-c^2}}{c}$

1) $m = 0$: Ebene senkrecht zur z-Achse

2) $0 < m < \infty$: Doppelkreiskegel mit z-Achse als Achse

3) $m = \infty$: Zylinder mit z-Achse als Achse

b) $\varkappa = \lambda^2 > 0$

$\Rightarrow x(u) = A \sin(\lambda \cdot u + \phi)$

Kugel mit dem Radius $\frac{1}{\lambda}$ und Gaußschen Krümmung von $\frac{1}{\lambda^2}$

$x'^2 + z'^2 = 1 \quad \Rightarrow A = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow z(u) = \pm\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda \cdot u + \phi) + C$

c) $\alpha = -\lambda^2 < 0$

$x'' - \lambda^2 x = 0$ → mit hyperbolischen Fkt geht nicht, da Ableitungen unbeschränkt sind

$x(u) = A \exp(-\lambda u)$; $A = \frac{1}{\lambda}$; $x' = -\exp(-\lambda u)$

$x'^2 + z'^2 = 1$

$z' = \sqrt{1 - x'^2} = \sqrt{1 - (-\exp(-\lambda u))^2} = \sqrt{1 - (\lambda x(u))^2}$

-> kann nicht in geschlossener Form gelöst werden

↳ z von x abhängig machen

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du}\frac{du}{dx} = \frac{z'}{x'} = \frac{\sqrt{1-\lambda^2 \cdot x^2}}{x'} = -\frac{\sqrt{1-\lambda^2 \cdot x^2}}{\lambda x}$$

$$= \frac{-\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - x^2}}{x}$$

-> Integrieren mit Hilfe der Umkehrfkt

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_{f(b)}^{f(a)} f^{-1}(x)dx + [x f(x)]_a^b$$

$$\Rightarrow z(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \sqrt{1-x^2} + C \qquad \text{für } \lambda = 1$$

Traktrix lässt man nun um die z-Achse rotieren und spiegelt Rotationskörper an der xy-Ebene und erhält somit die Pseudosphähre (Trakrikoid)

-> Oberfläche und Volumen ist endlich

$A_T = 4\pi \cdot R^2$; $V = \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{1}{2} V_K$

$= A_K$

- Traktrix / Schleppkurve
  - Mathematik
  - vgl. Volumen/Oberfläche
  - Gemeinsamkeiten/Unterschiede
- ART - Einbettung in einen höherdimensionalen Flachen Raum

- Wir benötigen, um die Traktrix zu malen einen Flachen Einbettungsraum:

  $-dr^2 = g_{AB}\, dx^A dx^B = G_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu + \frac{1}{K} dz^2 \rightarrow N+1\text{-Dim.}$

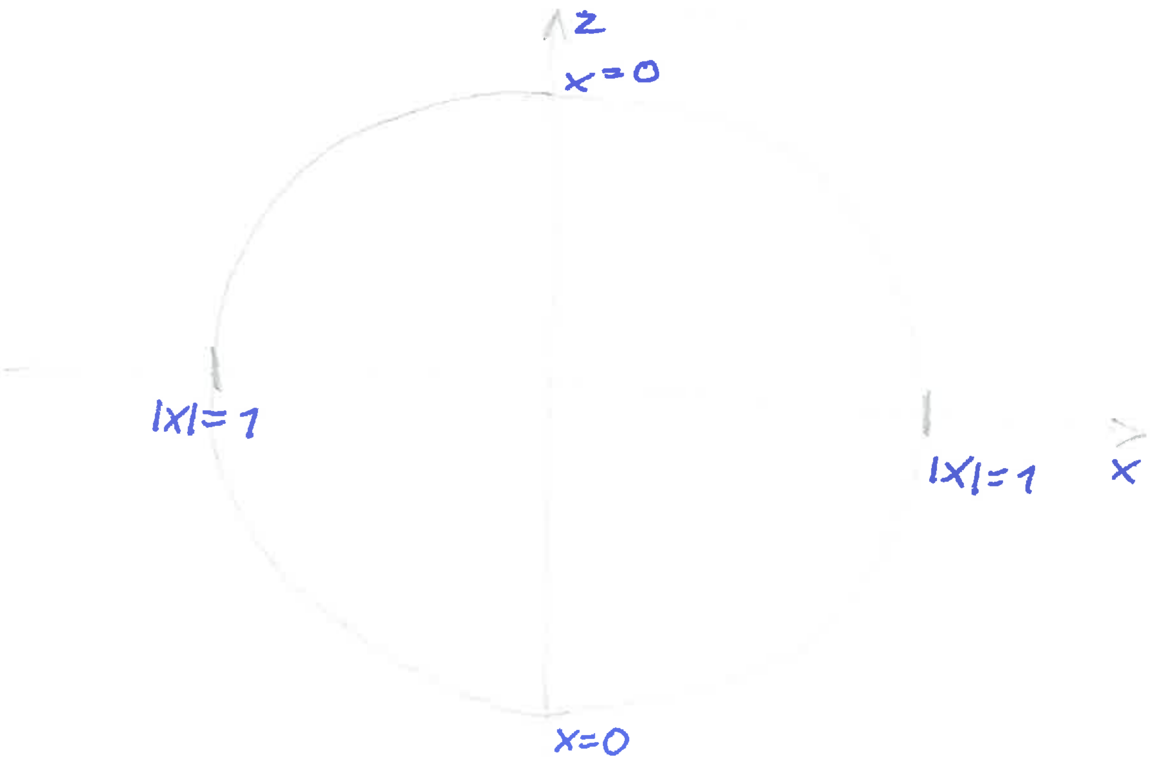
  $G_{\mu\nu}$: $N \times N$ Matrix ; K: irgendeine Konstante

- Dort wird eine Sphäre/Pseudosphäre eingebettet.
- Die Oberfläche dieses N-Dim Objekts ist:

  $K G_{\mu\nu} x^\mu x^\nu + z^2 = 1$

vgl. Kugelgleichung: $x^2 + y^2 + z^2 = r$

d.h. "Sphäre" mit "Radius" = 1



• Linienelement

$$dz^2 = \frac{K^2 (C_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu)^2}{z^2}$$

$$= \frac{K^2 (C_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu)}{(1 - K C_{\mu\nu} x^\mu x^\nu)}$$

$$\frac{d}{dx^\nu} z = \frac{d(1 - K C_{\mu\nu} x^\mu x^\nu)/dx^\nu}{z}$$

$$\frac{dz}{dx^\nu} = \frac{- K C_{\mu\nu} x^\mu}{z}$$

$$\Rightarrow -d\tau^2 = C_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{K (C_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu)^2}{(1 - K C_{\mu\nu} x^\mu x^\nu)}$$

dadurch erhält man die Metrik:

$$g_{AB} dx^A dx^B = C_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{K (C_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu)^2}{(1 - K C_{\mu\nu} x^\mu x^\nu)}$$

$$\Rightarrow g_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} + \frac{K}{1 - K C_{\mu\nu} x^\mu x^\nu} \frac{(C_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu)^2}{dx^\mu dx^\nu}$$

$\Rightarrow$ Produktregel und Summation beachten $(2 \times \delta)$

$$\Rightarrow g_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} + \frac{K}{1 - K C_{\mu\nu} x^\mu x^\nu} \cdot C_{\mu\lambda} x^\lambda C_{\nu\kappa} x^\kappa$$

evtl. weglassen!

Dann Christoffelsymbole ausrechnen:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = K x^\mu g_{\nu\lambda}$$

nochmal nachschauen!

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu i} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} \right)$$

$\cancel{0 = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + K x^\mu g_{\nu\lambda}}$

Geodätengleichung:

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + K x^\mu = 0$$

Aus Vorlesung ART:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{v}^2 = \frac{1}{2} m g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k$$

$$\Rightarrow \dot{v}^2 = 1 \Rightarrow g_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 1$$

~~Anmerkung $g_{\nu\lambda}$ wegmulti-~~

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + Kx^\mu = 0 \rightarrow \text{DGL}$$

~~tiefer~~ Lösung bekannt (harm Oszillator)
$\sin(\tau\sqrt{K})$ und $\cos(\tau\sqrt{K})$
aber Lösung für $K<0$:
$\sinh(\tau\sqrt{-K})$ und $\cosh(\tau\sqrt{-K})$

Zur Darstellung wird nun eine Einfache Geometrische Metrik benutzt, d. h. $-d\tau = ds^2$

~~anschauen~~ wir betrachten

bei knapper Zeit ab hier weiter

$$-d\tau^2 = C_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{K(C_{\mu\nu}x^\mu dx^\nu)^2}{(1-KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)}$$

$C_{\mu\nu}$ ist eine Konstante Matrix, sie Repräsentiert N der $N+1$ Dimensionen. Sie kann ohne weiteres als Einheitsmatrix angesehen werden.
Zusätzlich kann es eine Konstante mal die Einheitsmatrix sein, für $K \neq 0$ kann man $C_{\mu\nu} = \left|\frac{1}{K}\right|$ setzen. ($K=0 \rightarrow C_{\mu\nu}$ einheitsmatrix - Flach)
zusätlich die Geometrische betrachtung

$$-d\tau^2 = C_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{K(C_{\mu\nu}x^\mu dx^\nu)^2}{(1-KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)}$$

$$\cancel{ds^2 = \left|\frac{1}{K}\right| dx^2 \pm \left|\frac{1}{K}\right| \frac{x^2dx^2}{1+x^2}}$$

$$\cancel{ds^2 = \left|\frac{1}{K}\right| \left(dx^2 \pm \frac{x^2 dx^2}{1+x^2}\right)}$$

$$\Rightarrow ds^2 = \frac{1}{|K|}\left(d\vec{x}^2 - \frac{(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2}{1+\vec{x}^2}\right)$$

$$\text{bzw. } ds^2 = \frac{1}{|K|}\left(d\vec{x}^2 + \frac{(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2}{1-\vec{x}^2}\right)$$

$$dz^2 = \frac{K^2 (C_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu)^2}{z^2} \qquad C_{\mu\nu} = \frac{1}{|K|}$$

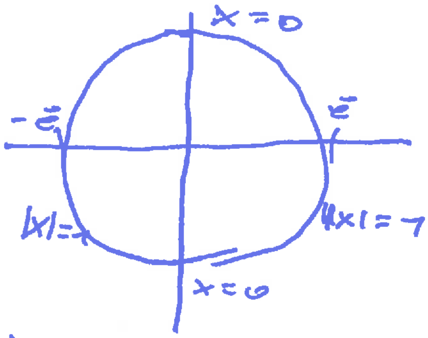
$$= \frac{(\vec{x}\, d\vec{x})^2}{z^2}$$

Vorzeichen ändert sich mit dem Vorzeichen für K

$$\Rightarrow dz^2 = \mathrm{sgn}(K)\frac{(\vec{x}\, d\vec{x})^2}{z^2}$$

Kugel: $\vec{x}^2 + z^2 = 1$

$$ds^2 = \frac{1}{K}(d\vec{x}^2 + dz^2)$$



$\vec{x}^2 \leq 1$

$\vec{x} = \vec{e}\sin(s\sqrt{K})$ $\quad \vec{e}$ für Äquator

$\vec{x} = \vec{e}\sin(0) \Rightarrow \vec{x} = 0$

$\vec{x} = \vec{e}\sin(\pi) = \vec{e}$ $\quad$ bei $s = \frac{\pi}{\sqrt{K}}$

$\vec{x} = \vec{e}\sin(\frac{3}{2}\pi) = -\vec{e}$ $\quad s = \frac{3}{2}\frac{\pi}{\sqrt{K}}$

Pseudosphäre

~~$\vec{x} = \vec{e}\sinh(\frac{s}{\sqrt{-K}})$ mit $\vec{e}^2 = 1$~~ $\quad \vec{x} = \vec{e}\sinh(s\sqrt{-K})$

$\vec{x}$ ist unbeschränkt

$$-d\tau^2 = C_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{1}{K}dz^2$$

$$\boxed{ds^2 = \frac{1}{|K|}(d\vec{x}^2 - dz^2)} \qquad K C_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + z^2 = 1$$

$$\Rightarrow -\vec{x}^2 + z^2 = 1$$

$\rightarrow$ Pseudometrik