

(1) => ∂t ε1 + ε0 ∇ · v1 = 0 (4)

(2) => ∂t v1 + (v0 · ∇) v1 = - 1/ε0 ∇ p1 - ∇ Φ1 (5)

(3) => Δ Φ1 = 4π G ρ1 (6)

Adiabatische Zustandsgleichung: p1 = p1(ε1)

Schallgeschwindigkeit: vs^2 = ∂p / ∂ε

Mit (5) =>

∂t v1 = - vs^2 ∇ ε1 - ∇ Φ1 (7)

∂t (4) => ∂t^2 ε1 + ε0 ∇ · ∂t v1 = 0

(7) => ∂t^2 ε1 - vs^2 Δ ε1 - Δ Φ1 = 0

(6) => ∂t^2 ε1 - vs^2 Δ ε1 = 4π G ε0 ε1 (8)

Wellengleichung => Ansatz ebener Wellen

ε1 = A exp [i (k·x - ωt)]

=> -ω^2 + vs^2 k^2 = 4π G ε0 ε1

ω^2 = vs^2 k^2 - 4π G ε0 ε1 (9)

Probleme werden da wo der nur für k^2 > 4π G ε0 / vs^2 := λJ^2

λJ = 2π / λJ heißt Jeanswellenlänge. Für Wellenlänge λ > λJ

tritt Instabilität auf, d.h. wenn die Masse der Fluktuation größer wird als die Jeans-Masse

MJ = 4π / 3 ρ ρ4 λJ^3 (10)

Im Vergleich zur Hubble Expansionsrate

(3)

$$\frac{\dot{a}}{a} = H \sim \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \epsilon} \quad (11)$$

(vgl. Zusatzblatt zu Aufgabenblatt 5)

ist dies (parametrisch) von der gleichen Größenordnung. Wir können also zwar die Störung der FLRW-Metrik aufgrund von Dichtefluktuationen Newtonsch behandeln (außer für wirklich große Dichten wie Neutronensterne o.ä.), müssen aber die Hubble-Expansion berücksichtigen. Das sieht mit der "Newtonschen Kosmologie".

2. Newtonsche Kosmologie

Betrachte Fluid, das sich in allen Richtungen gleichmäßig ausdehnt

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) \frac{a(t)}{a(t_0)} \quad (\text{Koordinate eines Fluid elements})$$

Jetzt nimmt man an, daß auf das Gasteilchen nur die Gravitation von allen Gasteilchen innerhalb der Kugel mit Radius $|\vec{x}(t)|$ wirkt:

$$V = -m G \frac{4\pi}{3} \epsilon(t) |\vec{x}(t)|^3 \cdot \frac{1}{|\vec{x}(t)|} \quad (12)$$

\uparrow "Masse"-Dichte des Substanz
 Masse des Gasteilchen

Die Gesamtennergie des Gasteilchens ist demnach

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + V \\ &= \frac{m}{2} |\vec{x}(t_0)|^2 \frac{1}{a_0^2} \left[\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3} \epsilon a^2 \right] \\ \text{def. } K &= -\frac{m}{2} |\vec{x}(t_0)|^2 \frac{c^2}{a_0^2} K \end{aligned}$$

Dann folgt die Friedmann-Gleichung

(4)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \epsilon \quad (13)$$

(allerdings für $\Lambda = 0$!).

Die gesamte Masse in der Kugel vom Radius $|\vec{x}(t)|$ muß erhalten sein, so daß

$$\epsilon(t) |\vec{x}(t)|^3 = \epsilon(t_0) |\vec{x}(t_0)|^3$$

$$\Rightarrow \epsilon(t) a^3(t) = \epsilon(t_0) a_0^3 \quad (14)$$

NB: Probleme der Newtonschen Kosmologie:

(1) Annahme, daß nur Materie innerhalb der Kugel vom Radius $|\vec{x}(t)|$ wirksam wird für die Gravitationsladung ist ad hoc.

(2) keine konsistente Theorie der Lichtausbreitung

(3) bricht für relativistische Geschwindigkeiten zusammen, also spätestens für Zeiten inwärts des Hubblezeit, also $t, |\vec{x}| \sim \frac{1}{H}$.

Betrachten wir nun Dichteschwankungen.

Aus der Kontinuitätsgleichung (4) folgt mit

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v} = \vec{x}_0 \frac{\dot{a}}{a_0} = \vec{x} \frac{\dot{a}}{a} \quad (15)$$

sofort unter Verwendung von (14)

$$a_0^3 \partial_t (a^{-3}) + a_0^3 a^{-4} \dot{a} \vec{v} \cdot \vec{x} = 0, \text{ d.h. (5) ist}$$

automatisch erfüllt.

⑤

Aus (9) mit $\rho=0$ folgt

$$\left[\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] \vec{x} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \vec{x} = - \vec{\nabla} \Phi$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} \vec{x} = - \vec{\nabla} \Phi \quad (16)$$

Das Gravitationspotential ist aufgrund unseres Ansatzes

also

$$\Phi = + C |\vec{x}|^2$$

$$(16) \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \cancel{\text{Null}} - 2C$$

Ableiten von (13) nach der Zeit liefert mit (14)

~~$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 4 \frac{\dot{a}}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \dot{\epsilon} = 2 \frac{8\pi G \epsilon_0 a_0^3 \dot{\epsilon}}{a^4}$$~~

~~$$(13) \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \left(\frac{8\pi G}{3} \epsilon - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = - \frac{8\pi G \epsilon_0 a_0^3 \dot{\epsilon}}{a^4}$$

$$\frac{8\pi G \epsilon_0 a_0^3 \epsilon}{3}$$~~

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{4}{a^2} - 4\pi G \epsilon \stackrel{(13)}{=} - \frac{4\pi G}{3} \epsilon$$

$$\Rightarrow C = \frac{2\pi G}{3} \epsilon \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{4\pi G}{3} \epsilon \quad (16)$$

Insgesamt ist also die angestrebte Lösung

$$\vec{v}_0 = \dot{a} \vec{x} ; \quad \Phi_0 = \frac{2\pi G}{3} \epsilon |\vec{x}|^2 ; \quad \epsilon \equiv \epsilon^{(0)} = \epsilon_0 \frac{a_0^3}{a^3} \quad (17)$$

Ansatz für lineare Störung:

$$\epsilon = \epsilon^{(0)} + \lambda \epsilon_1 + \dots; \quad \rho = \lambda \rho_1 + \dots$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \lambda \vec{v}_1 + \dots$$

$$\Phi = \Phi_0 + \lambda \Phi_1 + \dots$$

Das in (1-3) eingesetzt liefert

$$\partial_t \epsilon_1 + 3 \epsilon_1 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \epsilon_1 + \epsilon^{(0)} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (18)$$

$$\partial_t \vec{v}_1 + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v}_1 + \frac{\dot{a}}{a} (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 + \frac{1}{\epsilon^{(0)}} \vec{\nabla} \rho_1 + \vec{\nabla} \Phi_1 = 0 \quad (19)$$

$$\Delta \Phi_1 = 4\pi G \epsilon_1 \quad (20)$$

Adiabatische Schwerkraft $\Rightarrow \vec{\nabla} \rho_1 = v_s^2 \vec{\nabla} \epsilon_1$

Ebene Wellenansatz mit Skalierung:

$$\epsilon_1 = \hat{\epsilon}_1(k) \exp\left(\frac{i \vec{k} \cdot \vec{x}}{a(k)}\right) \quad (21)$$

$$\vec{v}_1 = \hat{\vec{v}}_1(k) \exp\left(\frac{i \vec{k} \cdot \vec{x}}{a(k)}\right) \quad (22)$$

$$\Phi_1 = \hat{\Phi}_1(k) \exp\left(\frac{i \vec{k} \cdot \vec{x}}{a(k)}\right) \quad (23)$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{\epsilon}}_1 + \frac{3\dot{a}}{a} \hat{\epsilon}_1 + i \frac{\epsilon^{(0)}}{a} (\hat{\vec{v}}_1 \cdot \vec{k}) = 0 \quad (24)$$

$$\dot{\hat{\vec{v}}}_1 + \frac{\dot{a}}{a} \hat{\vec{v}}_1 + i \frac{\vec{k}}{a} \left(\frac{v_s^2}{\epsilon^{(0)}} - \frac{4\pi G a^2}{|\vec{k}|^2} \right) \hat{\epsilon}_1 = 0 \quad (25)$$

$$\hat{\Phi}_1 = - \frac{a^2}{|\vec{k}|^2} 4\pi G \epsilon_1 \quad (26)$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1\parallel} + \vec{v}_{1\perp} \quad (27)$$

$$\text{mit } \vec{v}_{1\parallel} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}_1}{|\vec{r}|} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}; \quad \vec{v}_{1\perp} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{1\parallel} \quad (\Rightarrow \vec{v}_{1\perp} \cdot \vec{r} = 0)$$

$$:= \lambda \vec{r}$$

$$(25) \Rightarrow \dot{\vec{v}}_{1\perp} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v}_{1\perp} = 0 \quad (28)$$

$$\dot{\lambda} + \frac{\dot{a}}{a} \lambda + \frac{i}{a} \left(\frac{v_s^2}{\epsilon^{(0)}} - \frac{4\pi G a^2}{|\vec{r}|^2} \right) \epsilon_1 = 0 \quad (25)$$

Aus (24) wird

$$\dot{\hat{\epsilon}}_1 + \frac{3\dot{a}}{a} \hat{\epsilon}_1 + i \frac{\epsilon^{(0)}}{a} |\vec{r}|^2 \lambda = 0 \quad (30)$$

Lösungen

$$(28) \Rightarrow \vec{v}_{1\perp} = \frac{v_{1\perp}^{(0)}}{a} \leftarrow \text{const} \quad (31)$$

\Rightarrow fallen immer ab ($a \uparrow \Rightarrow$ Expansion!)

Definiere Dichte Kontrast

$$\delta = \frac{\hat{\epsilon}_1}{\epsilon^{(0)}} = \frac{\hat{\epsilon}_1 a^3}{\epsilon_0 a_0^3} \quad (32)$$

$$(30) \Rightarrow \dot{\delta} = - \frac{i |\vec{r}|^2 \lambda}{a} \quad (33)$$

Ableiten dieser Gl. nach t und mit (25)

$$\Rightarrow \ddot{\delta} + \frac{2\dot{a}}{a} \dot{\delta} + \left(\frac{v_s^2 |\vec{r}|^2}{a^2} - 4\pi G \epsilon^{(0)} \right) \delta = 0 \quad (34)$$

Für statisches Universum ist die gerade die Gleichung für Schallwellen (falls $\frac{\dot{R}_1}{a} > \dot{R}_2$) bzw. Wachsende Kompressionswellen ($\frac{\dot{R}_1}{a} < \dot{R}_2$). (8)

Jetzt können wir (34) für verschiedene FLRW-Universen untersuchen:

(a) Materie dominiertes Kosmos ($p=0$)

$$a(t) = \left(\frac{9}{4} \kappa\right)^{1/3} t^{2/3}; \quad \epsilon^{(0)} = \frac{1}{6\pi G t^2}$$

$$\text{mit } \kappa = \frac{8\pi G}{3} \rho \epsilon^{(0)} a^3$$

$$p=0 \Rightarrow v_s^2 = 0$$

$$(34) \Rightarrow \ddot{\delta} + \frac{4}{3t} \dot{\delta} - \frac{2}{3t^2} \delta = 0$$

$$\Rightarrow \delta(t) = d_+ t^{2/3} + d_- t^{-1} \quad (35)$$

Dichteschwankungen wachsen mit $t^{2/3}$

(b) Strahlungsdominierter Kosmos ($p = \frac{\epsilon}{3}$); ($v_s^2 = \frac{1}{3}$)

$$(34) \Rightarrow \ddot{\delta} + \frac{\dot{\delta}}{t} + \left(\frac{\dot{R}_1^2}{6\sqrt{3}} \frac{1}{t} - \frac{3}{8t^2} \right) \delta = 0 \quad (36)$$

$$\text{mit } a(t) = \sqrt{2} \beta^{1/4} \sqrt{t}; \quad \epsilon = \frac{3}{32\pi G} \cdot \frac{1}{t^2}$$

$$\beta = \frac{8\pi G}{3} \epsilon^{(0)} a^4$$

Vor der "Rekombination" wird der Druck von den Photonen geliefert, aber $\delta_\gamma \ll \delta_B \Rightarrow \delta \approx \delta_\gamma$

U367

5

$$\ddot{\delta}_{\vec{r}_1} + \frac{1}{t} \dot{\delta}_{\vec{r}_1} + \left(\frac{|\vec{r}_1|^2}{6\sqrt{3}} \frac{1}{t} - \frac{3}{8t^2} \right) \delta_{\vec{r}_1} = 0 \quad (37)$$

Die Lösungen dieser DGL sind oszillatorische Besselfunktionen

$$z_{\pm\sqrt{3}t} = a_1 J_{\pm\sqrt{3}} \left(\frac{t}{4\sqrt{|\vec{r}_1|^2}} \right) + a_2 Y_{\pm\sqrt{3}} \left(\frac{t}{4\sqrt{|\vec{r}_1|^2}} \right)$$

mit $\gamma = \frac{1}{6\sqrt{3}}$.

⇒ Vor dem "Rekombinations" wechsen Dichteschwankungen nicht sondern oszillieren bzw. fallen sehr langsam ab.

NB: Ergebnis der vollrelativistischen Störungstheorie

Für Kompressionsmoden folgt nach langer Rechnung (s. H. Gönner, Einführung in die Kosmologie, Spektrum 1994)

$$\ddot{\delta} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} + \left(\frac{|\vec{r}_1|^2 v_s^2}{a^2} - (\epsilon + p) \frac{4\pi G}{3a} \right) \delta = 0$$

⇒ Es gibt wieder Jeans-Unstabilitäten für

$$\frac{|\vec{r}_1|^2}{a} < \sqrt{\frac{4\pi G (\epsilon + p)}{v_s^2}} = \lambda_J$$

In der Zeit vor der Rekombination ergibt sich die Jeans-Wellenlänge als größer als der Teilchenhorizont. Daher ist die Newtonsche Theorie nicht mehr anwendbar und die Barjowische Fluktuation können nicht mehr wachsen.
 Nach der Rekombination ist das Universum materie dominiert.
 Dann gilt für adiabatische Zustandsänderungen

$$p = \frac{1}{3} \frac{T_M \epsilon}{m} \quad (\kappa_B = \kappa_C = \kappa_A = 1)$$

$$v_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{3} \frac{T_M}{m}$$

Andererseits

$$T_M = \frac{a_{nr}}{a} T_\gamma = \frac{T_\gamma}{T_{nr}} T_\gamma = \frac{T_\gamma^2}{T_{nr}}$$

$$\Rightarrow v_s^2 = \frac{1}{3m} \frac{T_\gamma^2}{T_{nr}}$$

Jeans-Masse (mit $\kappa_\gamma = \left(\frac{4\pi G \epsilon_M^{(0)}}{v_s^2} \right)$)

$$m_{J1} = \frac{25}{12\sqrt{3}} \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{3}} \frac{m_{\text{Planck}}^3}{m_p^2} \left(\frac{T_\gamma}{T_{nr}} \right)^{3/2}$$

$$\epsilon_M^{(0)} = m_{S_\gamma} B$$

$$\hat{L}_{S_\gamma} = \frac{4\pi^2}{45} T^3 \quad (\text{Entropie dichte der Photonen})$$

Das liefert $m_{J1} \sim 10^5 - 10^6 M_\odot$: Masse von typischen Kugelsternhaufen.

Temperaturschwankungen der Hintergrundstrahlung

- zuerst beobachtet 1992 durch COBE-Satellit: $\delta T/T \sim 10^{-5}$
- beobachtete Fluktuationen = primordiale Fluktuationen + Rotverschiebung aus Potential
- **Sachs-Wolfe-Effekt**

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_0 = \left(\frac{\delta T}{T}\right)_e - \Phi_e$$

- andererseits mehr Photonen im Inneren des Potentials („**heißer**“):

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_e \propto \Phi_e$$

- für Photonen: $aT = \text{const}$

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{\delta a}{a}$$

- für Zustandsgleichung $p = \alpha \epsilon$ gilt $a(t) \propto t^{2/[3(1+\alpha)]}$

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{2}{3(1+\alpha)} \frac{\delta t}{t} \simeq -\Phi$$

Temperaturschwankungen der Hintergrundstrahlung

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right) = -\frac{\delta a}{a} = -\frac{2}{3(1+\alpha)} \frac{\delta t}{t} = \frac{2}{3(1+\alpha)} \Phi_e$$

- materiedominierter Kosmos: $\alpha = 0$

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{1+3\alpha}{3+3\alpha} \Phi_e \stackrel{mat.}{=} -\frac{1}{3} \Phi_e$$

- teilweise Cancellation

- Photonen aus Potential von dichten Regionen **rotverschoben** („**kühler**“)
- andererseits **Aufheizung durch Kompression**
- Nettoeffekt: Photonen aus dichteren Regionen **kühler**

- $\delta T/T \sim 10^{-5}$ entspricht **Dichtefluktuationen bei der „Rekombination“**

Winkelkorrelationsfunktion

- Definition: Temperaturmessung in Richtung \vec{n}

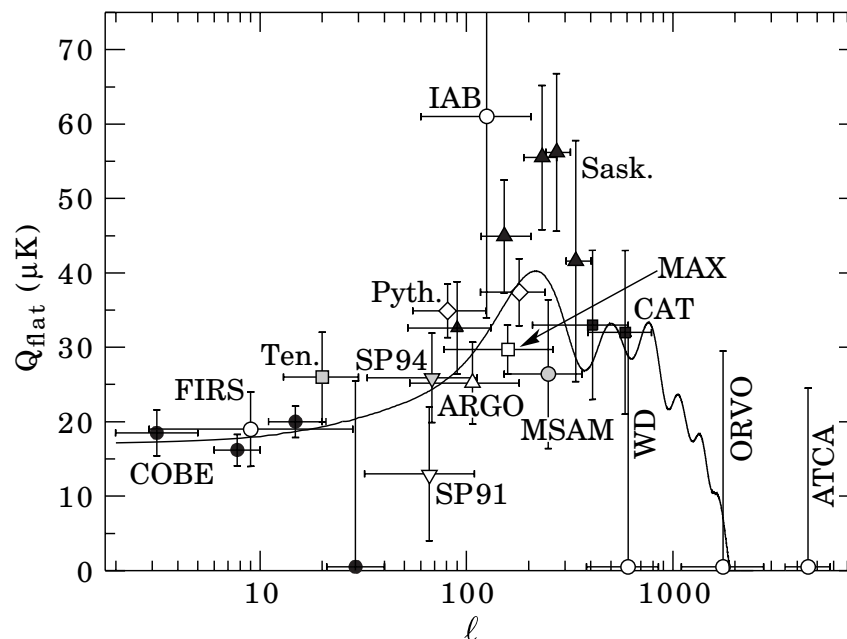
$$C(\theta) = \left\langle \frac{\delta T}{T}(\vec{n}) \frac{\delta T}{T}(\vec{n}') \right\rangle$$

- wird normalerweise durch **Multipolkoeffizienten** dargestellt

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \tilde{C}_l P_l(\cos \theta)$$

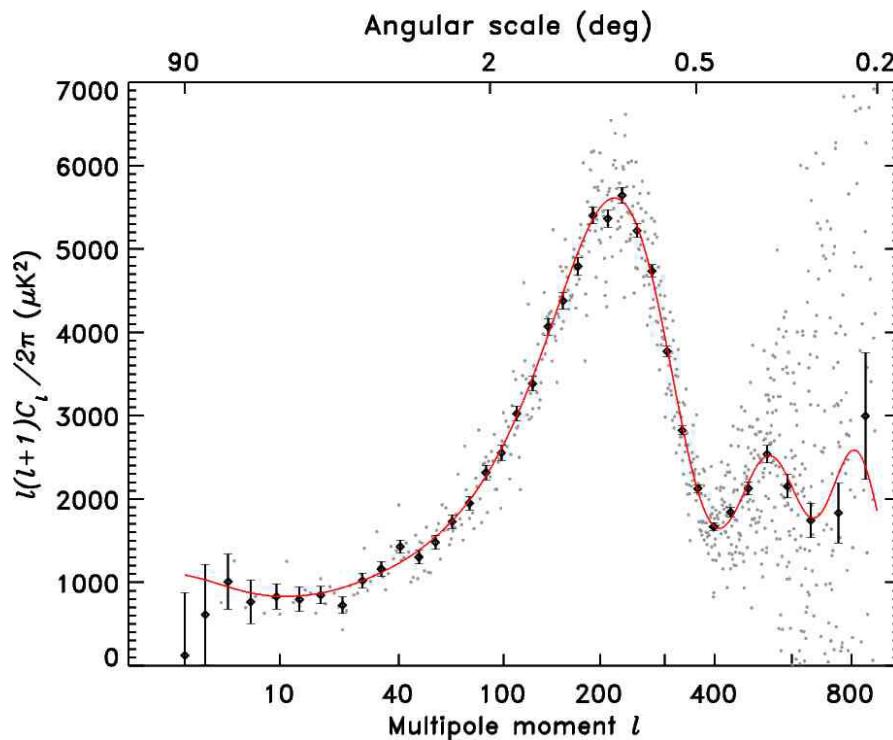
- NB: großes l entspricht kleineren Winkelauflösungen
- zeigt Peaks \Leftrightarrow Schallwellen der Materie bei Rekombination
- genaue Lage: **Rückschlüsse auf Substrat (Ω_M)**

Status 1997



[G. Smoot, The CMB anisotropy experiments, arXiv:astro-ph/9705135v1]

WMAP: Hochpräzisionsmessung



[D. N. Spergel et al, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003), arXiv:astro-ph/0302209v3]

Modernes Bild vom Universum

- best fit: flaches Modell mit **kalter dunkler Materie und Λ**
- $\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$ ($\Omega_B = 0.044 \pm 0.004$)
- Alter des Universums: $t_0 = (13.7 \pm 0.2)$ Gyr
- Rotverschiebung bei Rekombination $z_{\text{rek}} = 1089 \pm 1$

