Übungen zur Kosmologie – Blatt 1 – Lösungen

Aufgabe 1: Zweikörper-Kepler-Problem

Zur Wiederholung betrachten wir das Problem zweier sich umkreisender „punktförmiger" Himmelskörper im Rahmen der Newtonschen Mechanik. Die entsprechende Langrange-Funktion lautet

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{x}}_2^2 + \frac{K}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad \text{mit} \quad K = G m_1 m_2. \tag{1}$$

(a) Aufgrund der Galilei-Invarianz der Lagrange-Funktion bietet sich die Einführung von Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \tag{2}$$

an. Zeigen Sie, daß die Lagrange-Funktion in diesen Koordinaten die Form

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{K}{|\vec{r}|} \tag{3}$$

mit der reduzierten Masse $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ annimmmt.

Lösung: Zunächst drücken wir $\vec{x}_{1,2}$ mittels (2) durch $\vec{R}$ und $\vec{r}$ aus:

$$\vec{x}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} = \vec{R} + \frac{\mu}{m_1}\vec{r}, \quad \vec{x}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} = \vec{R} - \frac{\mu}{m_2}\vec{r}. \tag{4}$$

Setzen wir dies in die Lagrange-Funktion (1) ein, erhalten wir

$$L = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{K}{r}. \tag{5}$$

(b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für $\vec{R}$ und $\vec{r}$ aus den Euler-Lagrange-Gleichungen her und zeigen Sie, daß es ein Inertialsystem gibt, wo $\vec{R} = \text{const}$ ist (das Schwerpunktssystem).

Lösung: Die Euler-Lagrange-Gleichungen für $\vec{R}$ und $\vec{r}$ ergeben

$$M\ddot{\vec{R}} = 0, \quad \mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{K}{r^3}\vec{r} = -\frac{G m_1 m_2}{r^3}\vec{r} = -\frac{G\mu M}{r^3}\vec{r}. \tag{6}$$

Wie zu erwarten, bewegt sich der Schwerpunkt wie ein freies Teilchen, und wir können ein Inertialsystem wählen, wo $\vec{R} = 0 = \text{const}$ ist (Schwerpunktssystem). Die Relativbewegung reduziert sich auf die Bewegung eines Teilchens mit der effektiven Masse μ um ein festes Zentrum bei $\vec{r} = 0$, d.h. um den Schwerpunkt des Zweikörpersystems.

(c) Zeigen Sie, daß der Relativbahndrehimpuls der Relativbewegung $\vec{\ell} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ erhalten ist.

Lösung: Die Ableitung von $\vec{\ell}$ nach der Zeit liefert

$$\dot{\vec{\ell}} = \mu(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) \stackrel{(6)}{=} \mu\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = -\frac{K}{r^3}\vec{r} \times \vec{r} = 0. \tag{7}$$

(d) Wählen Sie nun das Koordinatensystem so, daß $\vec{\ell} = \ell \vec{e}_z$ ist und führen Sie via $\vec{r} = (x, y, 0) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$ Polarkoordinaten in die Lagrange-Funktion ein.

Lösung: Es gilt

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0\end{pmatrix} + r\dot{\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0\end{pmatrix} \tag{8}$$

und damit für die Lagrange-Funktion der Relativbewegung

$$L_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{K}{r} = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{K}{r}. \tag{9}$$

(e) Bestimmen Sie die Erhaltungsgrößen des verbleibenden Problems (Drehimpulsbetrag ℓ und Energie E). Erläutern Sie, daß einer der Erhaltungssätze dem 2. Keplerschen Gesetz (Flächensatz) entspricht.

Lösung: Wie aus der Symmetrie des Problems unter Drehungen um die z-Achse zu erwarten ist, ist φ eine zyklische Variable, d.h. L_{rel} hängt nicht explizit von φ ab. Folglich ist der dazugehörige kanonisch konjugierte Impuls

$$p_\varphi = \frac{\partial L_{\text{rel}}}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} = \ell = \text{const.} \tag{10}$$

Weiter hängt (9) nicht explizit von der Zeit ab und folglich ist die Hamilton-Funktion, d.h. die Energie, eine Erhaltungsgröße:

$$E = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - L = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{K}{r} = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r} = \text{const.} \tag{11}$$

Die letztgenannte Form reduziert das Problem auf eine effektiv eindimensionale Bewegung eines Teilchens in einem Potential

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r}. \tag{12}$$

Das 2. Keplersche Gesetz folgt aus der Drehimpulserhaltung, denn die vom Strahl $\vec{r}$ in einem Zeitinkrement $\mathrm{d}t$ überstrichene Fläche ist durch

$$\mathrm{d}F = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|\mathrm{d}t = \frac{1}{2}r^2 = \frac{\ell}{2\mu}\mathrm{d}t \tag{13}$$

gegeben d.h. es ist in der Tat

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\ell}{2\mu} = \text{const.} \tag{14}$$

(f) Bestimmen Sie eine Differentialgleichung für die Bahnform $r = r(\varphi)$, was auf das 1. Keplersche Gesetz führt, d.h. daß die Bahn eine Ellipse ist, falls die Bewegung gebunden ($E < 0$) ist. Bestimmen Sie deren Halbachsen a und b als Funktion von E und ℓ.

Hinweis: Verwenden Sie die Energieerhaltung und Drehimpulserhaltung sowie $r'(\varphi) = \dot{r}/\dot{\varphi}$ und Schreiben Sie die Energieerhaltungsgleichung als Funktion von $s = 1/r$ und s'. Nochmalige Ableitung dieser Gleichung führt zu einer sehr einfach zu lösenden DGL für $s(\varphi)$.

Lösung: Wir dividieren (11) durch $\dot{\varphi}^2$. Dies ergibt für den ersten Term $\dot{r}^2/\dot{\varphi}^2 = r'^2$, wobei der Strich jetzt die Ableitung nach φ bedeutet. In den übrigen Termen verwenden wir l1.7, um mit $\dot{\varphi} = \ell/\mu r^2$ alles wieder durch Terme mit r auszudrücken. Dies führt zunächst auf

$$\frac{\mu}{2} r'^2 + \frac{r^2}{2} - \frac{k\mu^2 r^3}{\ell^2} = \frac{E\mu^2 r^4}{\ell^2}. \tag{15}$$

Jetzt folgen wir dem Hinweis und substituieren $r = 1/s$ und $r' = -s'/s^2$. Nach einigen einfachen Umformungen erhalten wir

$$\frac{\ell^2}{2\mu} s'^2 + \frac{\ell^2}{2\mu} s^2 - Ks = E, \tag{16}$$

bzw.

$$s'^2 = -s^2 + 2Bs + A \quad \text{mit} \quad A = \frac{2\mu E}{\ell^2}, \quad B = \frac{\mu K}{\ell^2}. \tag{17}$$

Leiten wir diese Gleichung nach φ ab und dividieren durch $\dot{s}$, erhalten wir

$$s'' + s = B. \tag{18}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Ihre allgemeine Lösung ergibt sich aus Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (also (18) mit $B = 0$) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Daraus folgt, daß

$$s(\varphi) = C\cos(\varphi + \varphi_0) + B \tag{19}$$

ist. Wir können nun durch geeignete Wahl der x-Richtung erreichen, daß $\varphi_0 = 0$ bzw. $\varphi_0 = \pi$ ist. Wir wählen diejenige Möglichkeit für die

$$s(\varphi) = C\cos\varphi + B \tag{20}$$

wird und $C > 0$ gilt. Dann wird für $\varphi = 0$ wird s maximal bzw. $r = 1/s$ minimal, d.h. bei dieser Koordinatenwahl läuft die x-Achse durch das **Periastron**, also den Punkt auf den Bahnen der Körper, an dem sie den kleinsten Abstand annehmen. Der bei $\varphi = \pi$ angenommene Punkt maximalen Abstandes heist **Apastron**.

Um die Integrationskonstante C zu bestimmen, setzen wir (20) in (17) ein. Dies liefert

$$C = \sqrt{B^2 + A}, \tag{21}$$

und schließlich erhalten wir

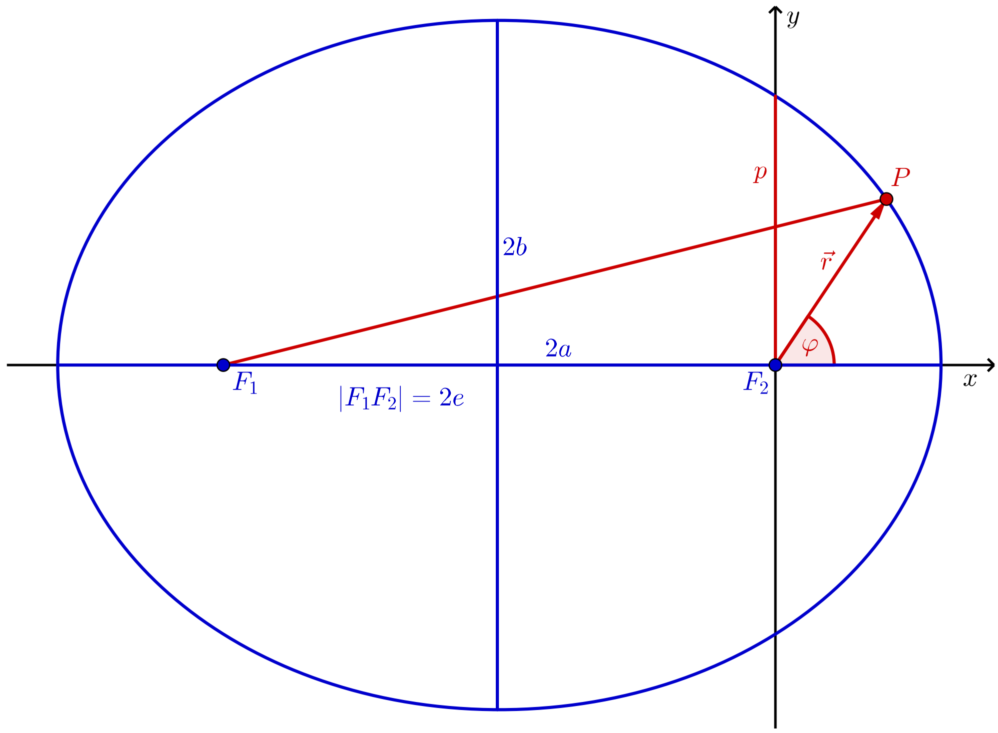
$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\varphi} \tag{22}$$

mit

$$p = \frac{1}{B} = \frac{\ell^2}{\mu K}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{A}{B^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu K^2}}. \tag{23}$$

Für $E < 0$ wird in der Tat $0 \leq \epsilon < 1$, und (22) beschreibt eine Ellipse mit dem Koordinatenursprung als einem Brennpunkt.

Der Vollständigkeit halber wollen wir dies hier noch zeigen. Gegeben seien zwei Punkte F_1 und F_2 im Abstand $2e$. Dann ist die Ellipse diejenige Menge aller Punkte P, für die $|F_1P| + |F_2P| = 2a =$ const ist.



Man liest aus der Skizze ab, daß hierbei a die große Halbachse der Ellipse ist. Weiter folgt für die definierende Gleichung in den eingezeichneten Polarkoordinaten

$$r + \sqrt{(2e + r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi} = 2a \Rightarrow 2a - r = \sqrt{4e^2 + 4er\cos\varphi + r^2}. \tag{24}$$

Quadrieren dieser Gleichung liefert nach einigen einfachen Umformungen tatsächlich (22) mit

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad \epsilon = \frac{e}{a}. \tag{25}$$

Dabei ist $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ die kleine Halbachse der Ellipse.

(g) (zum Knobeln) Bestimmen Sie die Periodendauer T der Bewegung, d.h. die Zeit, die das System benötigt, um von einem Periastron (kleinster Abstand der Körper auf ihrer Bahn) zum nächsten zu gelangen, indem Sie die Gesamtfläche der Ellipse $A = \pi ab$ mit dem 2. Keplerschen Gesetz kombinieren. Drücken Sie die Periodendauer als Funktion der großen Halbachse a der Ellipse aus und zeigen Sie, daß näherungsweise für $m_1 \gg m_2$ das 3. Keplersche Gesetz gilt, wonach für alle Planeten im Sonnensystem $T^2/a^3 = \text{const}$ gilt.

Lösung: Mit (25) können wir zunächst a und b als Funktionen von ϵ und p darstellen.

$$p = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{a^2(1-\epsilon^2)}{a} = a(1-\epsilon^2) \Rightarrow a = \frac{p}{1-\epsilon^2} \tag{26}$$

und damit

$$b^2 = pa = \frac{p^2}{1-\epsilon^2} \Rightarrow b = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}. \tag{27}$$

Mit (23) können wir die Halbachsen durch Energie und Drehimpuls ausdrücken (man erinnere sich, daß $E < 0$!):

$$a = -\frac{K}{2E}, \quad b = \frac{\ell}{\sqrt{-2\mu E}}. \tag{28}$$

Wir können nun den Flächensatz verwenden, um die Bahnperiode zu bestimmen. Integrieren wir dazu (14) über eine Bahnperiode T erhalten wir nämlich die Fläche der Ellipse, d.h.

$$F = \pi a b = \frac{\ell}{2\mu} T. \tag{29}$$

Mit (28) folgt

$$T = \frac{2\pi\mu a b}{\ell} = \pi K \sqrt{\frac{\mu}{-2E^3}}. \tag{30}$$

Dies nimmt die bekanntere Form des 3. Keplerschen Gesetzes an, indem wir (30) quadrieren und mittels der ersten Gleichung in (28) die Energie durch die große Halbachse ausdrücken:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{K} = \frac{4\pi^2\mu}{G m_1 m_2} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}. \tag{31}$$

In unserem Sonnensystem ist nun die Sonne weitaus schwerer als alle Planeten. Damit wird

$$\frac{T^2}{a^3} \approx \frac{4\pi^2}{G m_1}, \tag{32}$$

d.h. für alle Planeten im Sonnensystem ist näherungsweise $T^2/a^3 = \text{const}$, und das ist das 3. Keplersche Gesetz.

Aufgabe 2: Indirekter Nachweis von Gravitationswellen

Aus den Betrachtungen in der Vorlesung zur Strahlungsleistung von Gravitationswellen läßt sich für die Änderung der Bahnperiode eines Doppelsternsystems aufgrund der Abstrahlung von Gravitationswellen die Differentialgleichung

$$\dot{P}_b = -A\left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{-5/3} \tag{33}$$

herleiten. Dabei ist die Konstante A durch die Bahnparameter der Doppelsternbewegung durch

$$A = \frac{192\pi G^{5/3}}{5c^5}(1-e^2)^{-7/2}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right)m_p m_c(m_p+m_c)^{-1/3} \tag{34}$$

gegeben, wobei man davon ausgeht, daß die ART die korrekte Theorie der Gravitation ist[1]. Aus genauen Messungen der Zeiten der ankommenden Radiowellenimpulse lassen sich sehr genau die Bahnparameter bestimmen. Für den Hulse-Taylor-Doppelsternpulsar B1913+16 ergibt sich die numerische Exzentrizität der Bahn zu $e = 0.6171338(4)$, die Periodendauer der Bahn $P_b = 0.322997448930(4)$ d sowie die Massen $m_p = (1.4414 \pm 0.0002)M_\odot =$ and $m_c = (1.3867 \pm 0.0002)M_\odot$.

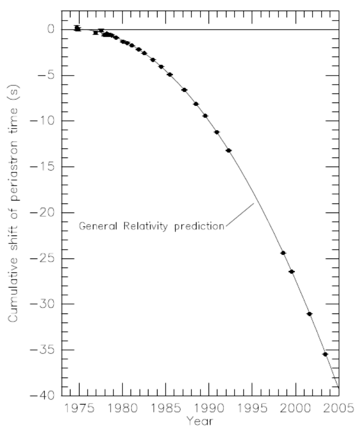
(a) Berechnen Sie $\dot{P}_b$ aus den angegebenen Parametern (mit $G = 6.67408(31)\cdot 10^{-11}\mathrm{m}^3/\mathrm{kg\,s}$ und $M_\odot = 1.98892(25)\cdot 10^{30}$ kg).

Lösung: Setzt man die Zahlenwerte in die angegebene Formel ein, ergibt sich $\dot{P}_b = -2.40293\cdot 10^{-12}$. In dem zitierten Artikel wird der Wert $\dot{P}_b = -2.40242(2)\cdot 10^{-12}$ angegeben. Die kleine Diskrepanz dürfte sich auf die Ungenauigkeit in der Gravitationskonstante und Sonnenmasse zurückführen lassen. Der gemessene Wert beträgt $\dot{P}_b = -2.4184(9)\cdot 10^{-12}$. Diese

(b) Die sog. Periastronepoche, also die integrierte Abweichung der Zeiten für den Periastrondurchgang von einer konstanten Periode ist durch

$$\Delta E = t - P_{b0}\int_0^t \mathrm{d}t' \frac{1}{P_b(t')} \tag{35}$$

gegeben. Diese Größe wurde über den Verlauf von 30a ebenfalls sehr genau gemessen. Ziehen Sie die entsprechende berühmte Abbildung unten nach, indem Sie (35) näherungsweise ausrechnen, indem Sie den Integranden bis zur linearen Ordnung in t' entwickeln und die oben angegebenen Werte einsetzen.



Periastronepoche als Funktion der Zeit. Abbildung aus J. M. Weisberg, J. H. Taylor, Binary Radio Pulsars, ASP Conference Series **328**, 25 (2005).

[1] J. M. Weisberg, J. H. Taylor, The Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis, ASP Conference Series **328**, 25 (2005), [arXiv:astro-ph/0407149].

Bemerkung: Für diejenigen, die das erhaltene Resultat selber in einem Plot mit den Daten vergleichen wollen, habe ich die Daten aus dem obigen Plot extrahiert. Sie können von der Vorlesungswebseite heruntergeladen werden.

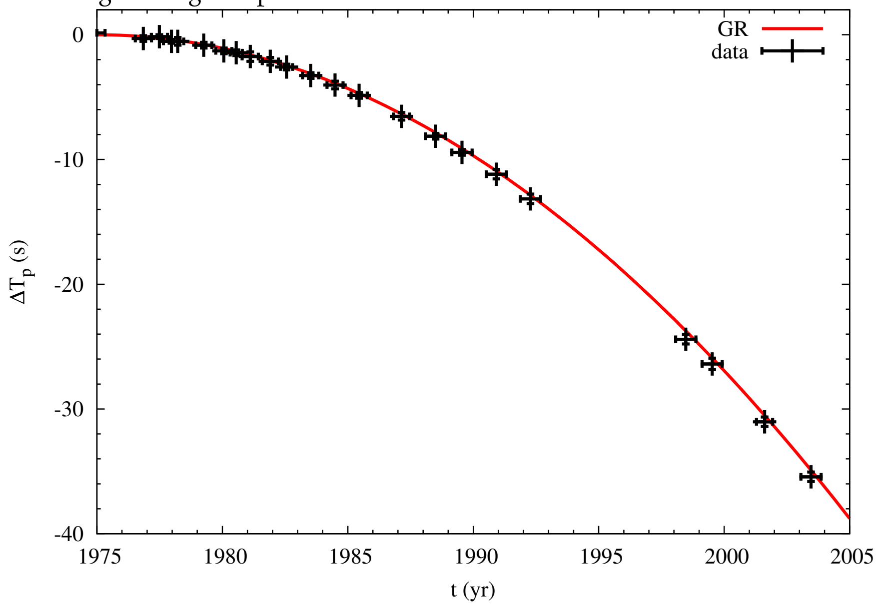
Lösung: Die Taylor-Entwicklung des Integranden lautet

$$\frac{1}{P_b(t')} = \frac{1}{P_{b0}} - \frac{\dot{P}_{b0}}{P_{b0}^2} t'. \tag{36}$$

Dies in (35) eingesetzt, ergibt

$$\Delta E = \frac{\dot{P}_{b0}}{2P_{b0}} t^2. \tag{37}$$

Damit läßt sich der obige Plot gut reproduzieren:



Bemerkung: Wir überprüfen die Korrektheit der Dimensionen in Gl. 34. Es gilt $[GM^2/r] = [Mv^2] = [ML^2/T^2]$ Damit ist $[G] = [L^3/(MT^2)]$ und damit

$$[A] = \left[\frac{G^{5/3}M^2}{c^5 M^{1/3}}\right] = \left[\frac{L^5 M^2}{M^{5/3}M^{1/3}T^{10/3}L^5/T^5}\right] = [T^{5/3}]. \tag{38}$$

Damit wir $\dot{P}_b$ gemäß (33) dimensionslos, wie es sein muß.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`http://fias.uni-frankfurt.de/~hees/cosmo-SS17/`