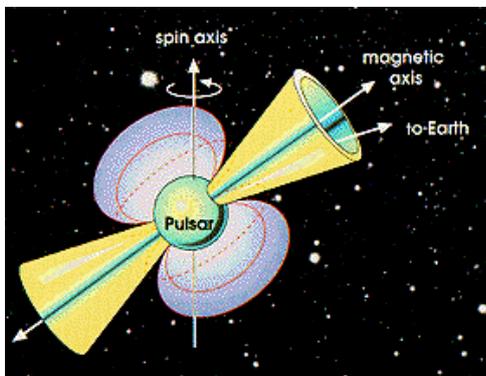


Grundlagen zum Pulsar-Timing

Hendrik van Hees

16. Mai 2017

1 Pulsare



Pulsare¹ wurden 1967 von Jocelyn Bell und Antony Hewitt bei der Durchmusterung des Himmels nach Radiosignalen entdeckt. Dabei handelt es sich um Neutronensterne, die bei Supernovae-Explosionen von gewöhnlichen Sternen entstehen. Wenn der Kernbrennstoff eines Sterns aufgebraucht ist, steht der Gravitation kein ausreichender Gasdruck mehr entgegen, und der Stern stürzt in sich zusammen. Ist die Gesamtmasse des entstehenden Objekts nicht zu groß (dann entstünde ein schwarzes Loch) oder zu klein (dann ergäbe sich ein roter Riese oder weißer Zwerg), entsteht ein **Neutronenstern**. Dieser vereinigt in sich die Masse von typischen Sternen (die schwersten nachgewiesenen

Neutronensterne weisen ca. zwei Sonnenmassen auf) in einem Objekt mit einem typischen Radius von ~ 10 km. Aufgrund der Drehimpulserhaltung rotiert solch ein Neutronenstern i.a. recht schnell und besitzt auch ein Magnetfeld. Ist dieses Magnetfeld nicht in Richtung der Rotationsachse gerichtet, entsteht ein mit der Frequenz der Eigenrotation des Sterns rotierendes Magnetfeld, was entsprechend den Maxwell-Gleichungen auch ein elektrisches Feld zur Folge hat. Dies bewirkt die Beschleunigung von ionisierten Teilchen entlang der rotierenden Dipolachse des Magnetfelds in der den Stern umgebenden Gaswolke, und die dabei entstehende Synchrotronstrahlung wird einem breiten Frequenzspektrum, gewöhnlich im Radiofrequenzbereich (aber auch im sichtbaren oder sogar Röntgenbereich) abgestrahlt. Trifft dieser Strahl die Erde, ergibt dies wie bei einem Leuchtturm ein mit der Eigenrotationsfrequenz des Sterns periodisch wiederkehrendes Signal. Die Wiederkehrfrequenz liegt dabei i.a. zwischen einigen Sekunden und Millisekunden.

Im Jahre 1974 haben dann Russell Hulse und Joseph H. Taylor Jr. die Signale eines Pulsars entdeckt, für den die Pulsfrequenz in charakteristischer Weise periodisch schwankt. Dies wurde kurz darauf als Doppler-Effekt des Signals aufgrund der periodischen Bewegung eines Pulsars in einem sich gegenseitig umkreisenden Systems zweier etwa gleich schwerer Sterne interpretiert, wobei der Begleitstern nicht direkt sichtbar ist. Im folgenden wollen wir erörtern, daß dieses Doppelsternsystem (PSR B 1913+16) eine reiche Quelle für Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie darstellt. Insbesondere konnte der erste indirekte Nachweis für die Abstrahlung von Gravitationswellen geführt werden, wobei sich die Vorhersage der ART mit einer Genauigkeit im Promillebereich bestätigen läßt.

¹Pulsar=engl. für „pulsating source of radio emission“

Die Radioimpulsperiode schwankt um den Nominalwert von 59 ms und die Periode der Schwankungen, die man mit der Umlaufdauer des Doppelsternsystems um seinen gemeinsamen Schwerpunkt identifiziert, beträgt $P_b \simeq 7,75$ h. Wir wollen im folgenden zumindest zum Teil die theoretischen Grundlagen, die dieser Hypothese und deren empirische Bestätigung zugrundeliegen.

Nach dem 3. Keplerschen Gesetz (s.u.) gilt für die große Halbachse der Relativbewegung

$$P_b = \tau \frac{(a/R_\odot)^{3/2}}{[(m_1 + m_2)/M_\odot]^{3/2}}, \quad \tau = \frac{2\pi R_\odot^{3/2}}{GM_{\text{sol}}} \simeq 0,116 \text{ d.} \quad (1)$$

Zu einer Abschätzung setzen wir als typische Werte für die Doppelsternmassen $m_1 \simeq m_2 \simeq 1,44M_{\text{sol}}$ und $a \simeq R_\odot$ ein. Dies liefert Geschwindigkeiten für die Bahnbewegung von $v \simeq 10^{-3}c$. Die Stärke des Gravitationsfeldes beträgt ca. das Hundertfache derjenigen für Merkur in unserem Sonnensystem. Einerseits ist die Bewegung von den beteiligten Geschwindigkeiten her betrachtet also nichtrelativistisch, d.h. die nichtrelativistische Lösung des Kepler-Problems eine akzeptable Näherung. Andererseits kann man aber auch erhebliche relativistische Korrekturen wie die Periastrondrehung (analog zur Periheldrehung im Sonnensystem) erwarten.

Leider kann man das Problem der Bewegung eines Zweikörperproblems unter Einfluß ihrer gegenseitigen Gravitationswechselwirkung nicht im Rahmen der ART geschlossen lösen. Dies gelingt im Sonnensystem näherungsweise, weil die Sonnenmasse sehr viel größer als die Massen aller Planeten ist und also die Planetenbewegung als Bewegung eines Probekörpers in dem durch die Schwarzschild-Lösung gegebenen Gravitationsfeld der Sonne behandelt werden kann. Für das Doppelsternsystem ist diese Näherung nicht mehr anwendbar, da die Sternmassen vergleichbar sind.

In der nichtrelativistischen Mechanik läßt sich das Kepler-Problem des Zweikörperproblems exakt lösen, und ART-Korrekturen können systematisch durch eine Entwicklung in Potenzen von $1/c$ und im Sinne eines schwachen Gravitationsfeldes (typische Entfernungen der Sterne voneinander groß gegen einen effektiven Schwarzschild-Radius) berücksichtigt werden. Wie sich zeigt, liefert schon die Berücksichtigung der nächsten Ordnung dieser sog. „Postnewtonschen Parametrisierung“ sehr gute Resultate für die hier betrachteten Doppelsternsysteme [Str13]. Sehr gute Reviews über die Entdeckungsgeschichte und die wesentlichen Methoden und Resultate des „Pulsar Timing“ läßt sich den Nobelpreisvorträgen von Hulse und Taylor [Hul94, Tay94] sowie [WT05] entnehmen.

Im folgenden beschäftigen wir uns ausführlich mit der Bestimmung der Keplerschen Bahnparameter und geben dann noch einen Ausblick auf die weitere Analyse aufgrund von ART-Korrekturen.

2 Das nichtrelativistische Zweikörper-Kepler-Problem

In diesem Abschnitt betrachten wir kurz die Theorie des nichtrelativistischen Zweikörper-Kepler-Problems, das sich vollständig analytisch lösen läßt und die Herleitung der drei Keplerschen Gesetze, verallgemeinert für den Fall, daß die sich umkreisenden Körper vergleichbare Massen besitzen. Wir verwenden die Lagrange-Methode zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{x}}_2^2 + \frac{K}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad \text{mit} \quad K = Gm_1m_2. \quad (2)$$

Aufgrund der Galilei-Invarianz der Lagrange-Funktion bietet sich die Einführung von Schwerpunkts-

und Relativkoordinaten

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \quad (3)$$

Zunächst drücken wir $\vec{x}_{1,2}$ mittels (3) durch \vec{R} und \vec{r} aus:

$$\vec{x}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} = \vec{R} + \frac{\mu}{m_1} \vec{r}, \quad \vec{x}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} = \vec{R} - \frac{\mu}{m_2} \vec{r}. \quad (4)$$

Setzen wir dies in die Lagrange-Funktion (2) ein, erhalten wir

$$L = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{K}{r}. \quad (5)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{R}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = 0 \quad (6)$$

ergeben die Bewegungsgleichungen

$$M \ddot{\vec{R}} = 0, \quad \mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{K}{r^3} \vec{r} = -\frac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = -\frac{G \mu M}{r^3} \vec{r}. \quad (7)$$

Wie zu erwarten, bewegt sich der Schwerpunkt wie ein freies Teilchen, und wir können ein Inertialsystem wählen, für das $\vec{R} = 0 = \text{const}$ ist (Schwerpunktssystem). Die Relativbewegung reduziert sich auf die Bewegung eines Teilchens mit der effektiven Masse μ um ein festes Zentrum bei $\vec{r} = 0$, d.h. um den Schwerpunkt des Zweikörpersystems.

Nach dem Noether-Theorem führt die Rotationsinvarianz der verbleibenden Lagrange-Funktion für die Relativbewegung

$$L_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{K}{r} \quad (8)$$

führt auf die Erhaltung des Relativbahndrehimpulses $\vec{\ell} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$. Die Ableitung von $\vec{\ell}$ nach der Zeit liefert in der Tat

$$\dot{\vec{\ell}} = \mu (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) \stackrel{(\ref{7})}{=} \mu \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = -\frac{K}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = 0. \quad (9)$$

Wählen wir nun das Koordinatensystem so, daß $\vec{\ell} = \ell \vec{e}_z$ mit $\ell > 0$ ist und führen via $\vec{r} = (x, y, 0) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)$ Polarkoordinaten ein, gilt

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + r \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ell = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z = \ell \vec{e}_z. \quad (10)$$

und damit für die Lagrange-Funktion der Relativbewegung

$$L_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{K}{r} = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{K}{r}. \quad (11)$$

Wie aus der Symmetrie des Problems unter Drehungen um die z-Achse zu erwarten ist, ist φ eine zyklische Variable, d.h. L_{rel} hängt nicht explizit von φ ab. Folglich ist der dazugehörige kanonisch konjugierte Impuls

$$p_\varphi = \frac{\partial L_{\text{rel}}}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} = \ell = \text{const.} \quad (12)$$

Weiter hängt (11) nicht explizit von der Zeit ab und folglich ist die Hamilton-Funktion, d.h. die Energie, eine Erhaltungsgröße:

$$E = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - L = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{K}{r} = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r} = \text{const.} \quad (13)$$

Die letztgenannte Form reduziert das Problem auf eine effektiv eindimensionale Bewegung eines Teilchens in einem Potential

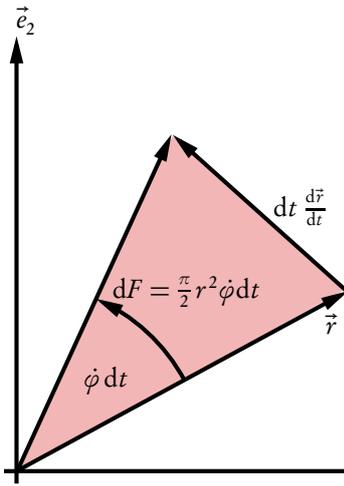
$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r}. \quad (14)$$

Aus der Drehimpulserhaltung folgt das 2. Keplersche Gesetz, denn die vom Strahl \vec{r} in einem Zeitinkrement dt überstrichene Fläche ist gemäß der nebenstehenden Skizze durch

$$dF = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| dt = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} dt = \frac{\ell}{2\mu} dt \quad (15)$$

gegeben d.h. es ist in der Tat

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\ell}{2\mu} = \text{const.} \quad (16)$$



Um eine Gleichung für die Bahnkurve $r = r(\varphi)$ zu erhalten, dividieren (13) durch $\dot{\varphi}^2$. Dies ergibt für den ersten Term $\dot{r}^2/\dot{\varphi}^2 = r'^2$, wobei der Strich jetzt die Ableitung nach φ bedeutet. In den übrigen Termen verwenden wir

(12), um mit $\dot{\varphi} = \ell/\mu r^2$ alles wieder durch Terme mit r auszudrücken. Dies führt zunächst auf

$$\frac{\mu}{2} r'^2 + \frac{r^2}{2} - \frac{k\mu^2 r^3}{\ell^2} = \frac{E\mu^2 r^4}{\ell^2}. \quad (17)$$

Nun substituieren wir $r = 1/s$ und $r' = -s'/s^2$. Nach einigen einfachen Umformungen erhalten wir

$$\frac{\ell^2}{2\mu} s'^2 + \frac{\ell^2}{2\mu} s^2 - Ks = E, \quad (18)$$

bzw.

$$s'^2 = -s^2 + 2Bs + A \quad \text{mit} \quad A = \frac{2\mu E}{\ell^2}, \quad B = \frac{\mu K}{\ell^2}. \quad (19)$$

Leiten wir diese Gleichung nach φ ab und dividieren durch s' , erhalten wir

$$s'' + s = B. \quad (20)$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Ihre allgemeine Lösung ergibt sich aus Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (also (20) mit $B = 0$) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Daraus folgt, daß

$$s(\varphi) = C \cos(\varphi + \varphi_0) + B \quad (21)$$

ist. Dabei sind C und φ_0 Integrationskonstanten. Wir können nun durch geeignete Wahl der x -Richtung erreichen, daß $\varphi_0 = 0$ bzw. $\varphi_0 = \pi$ ist. Wir wählen diejenige Möglichkeit für die

$$s(\varphi) = C \cos \varphi + B \quad (22)$$

wird und $C > 0$ gilt. Dann wird für s für $\varphi = 0$ maximal bzw. $r = 1/s$ minimal, d.h. bei dieser Koordinatenwahl läuft die x -Achse durch das **Periastron**, also den Punkt auf den Bahnen der beiden Sterne, an dem sie den kleinsten Abstand annehmen. Der bei $\varphi = \pi$ angenommene Punkt maximalen Abstands heißt **Apastron**.

Um die Integrationskonstante C zu bestimmen, setzen wir (22) in (19) ein. Dies liefert

$$C = \sqrt{B^2 + A}, \quad (23)$$

und schließlich erhalten wir

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi} \quad (24)$$

mit

$$p = \frac{1}{B} = \frac{\ell^2}{\mu K}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{A}{B^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu K^2}}. \quad (25)$$

Für $E < 0$ wird in der Tat $0 \leq \epsilon < 1$, und (24) beschreibt eine Ellipse mit dem Koordinatenursprung als einem Brennpunkt.

Der Vollständigkeit halber wollen wir dies hier noch zeigen. Gegeben seien zwei Punkte F_1 und F_2 im Abstand $2e$. Dann ist die Ellipse diejenige Menge aller Punkte P , für die $|F_1P| + |F_2P| = 2a = \text{const}$ ist.

Man liest aus der Skizze ab, daß hierbei a die große Halbachse der Ellipse ist. Weiter folgt für die definierende Gleichung in den eingezeichneten Polarkoordinaten

$$r + \sqrt{(2e + r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi} = 2a \Rightarrow 2a - r = \sqrt{4e^2 + 4er \cos \varphi + r^2}. \quad (26)$$

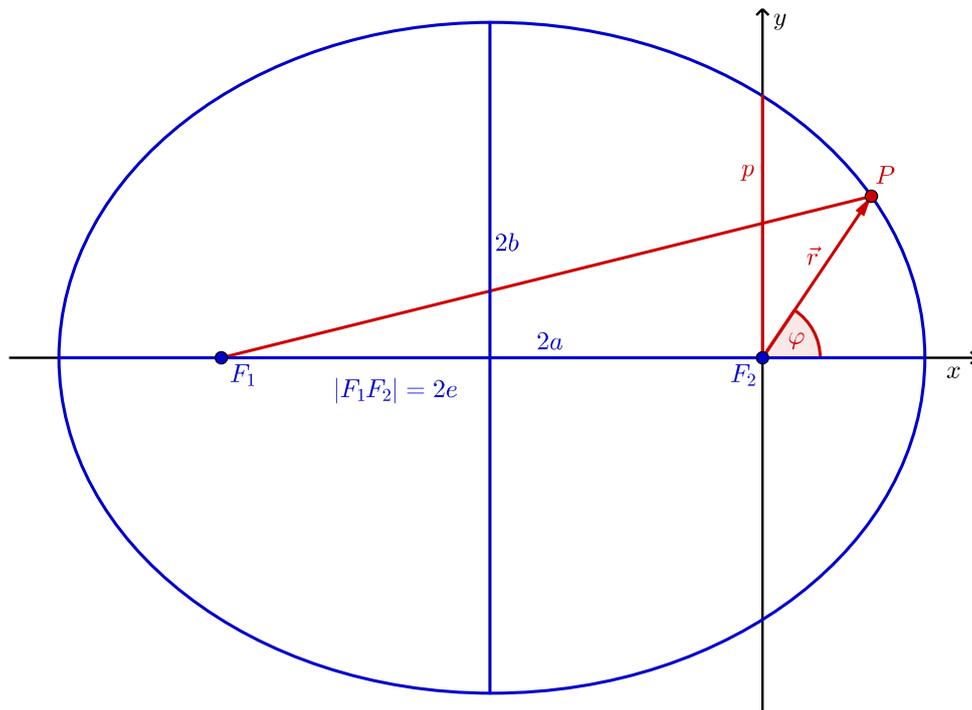
Quadrieren dieser Gleichung liefert nach einigen einfachen Umformungen tatsächlich (24) mit

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad \epsilon = \frac{e}{a}. \quad (27)$$

Dabei ist $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ die kleine Halbachse der Ellipse.

Nun läßt sich zusammen mit dem Flächensatz bereits die Bahnperiode P_b herleiten: Mit (27) können wir zunächst a und b als Funktionen von ϵ und p darstellen.

$$p = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{a^2(1 - \epsilon^2)}{a} = a(1 - \epsilon^2) \Rightarrow a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} \quad (28)$$



und damit

$$b^2 = pa = \frac{p^2}{1 - \epsilon^2} \Rightarrow b = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}. \quad (29)$$

Mit (25) können wir die Halbachsen durch Energie und Drehimpuls ausdrücken (man erinnere sich, daß $E < 0$ ist!):

$$a = -\frac{K}{2E}, \quad b = \frac{\ell}{\sqrt{-2\mu E}}. \quad (30)$$

Wir können nun den Flächensatz verwenden, um die Bahnperiode zu bestimmen. Integrieren wir dazu (16) über eine Bahnperiode P_b erhalten wir nämlich die Fläche der Ellipse, d.h.

$$F = \pi ab = \frac{\ell}{2\mu} P_b. \quad (31)$$

Mit (30) folgt

$$P_b = \frac{2\pi\mu ab}{\ell} = \pi K \sqrt{\frac{\mu}{-2E^3}}. \quad (32)$$

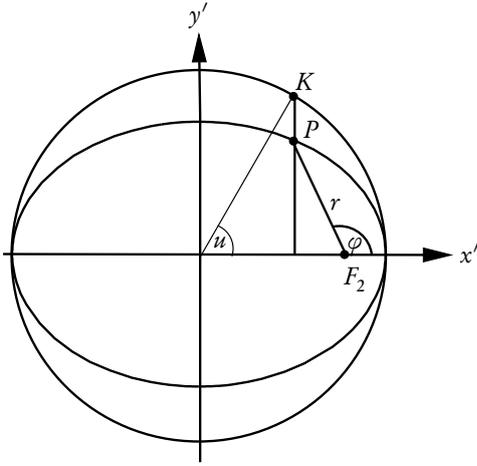
Dies nimmt die bekanntere Form des 3. Keplerschen Gesetzes an, indem wir (32) quadrieren und mittels der ersten Gleichung in (30) die Energie durch die große Halbachse ausdrücken:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{K} = \frac{4\pi^2\mu}{Gm_1m_2} = \frac{4\pi^2}{GM}. \quad (33)$$

2

²In unserem Sonnensystem ist nun die Sonne weitaus schwerer als alle Planeten. Damit wird

$$\frac{T^2}{a^3} \approx \frac{4\pi^2}{Gm_1}, \quad (34)$$



Weiter wollen wir auch die Bahnkurve als Funktion der Zeit bestimmen. Nach Kepler bietet sich dafür eine alternative Parametrisierung der Ellipse an. Dazu führen wir gemäß der nebenstehenden Skizze die exzentrische Anomalie u ein. Zunächst stellen wir fest, daß in impliziter Form die Ellipse durch die Gleichung

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = \frac{(e + r \cos \varphi)^2}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1, \quad (35)$$

wobei wir (24) verwendet haben. Aus der Skizze lesen wir weiter ab, daß

$$x' = a \cos u \stackrel{(35)}{\Rightarrow} y' = b \sin u. \quad (36)$$

Um die Beziehung zu φ zu erhalten, berechnen wir

$$r^2 = (a \cos u - e)^2 + b^2 \sin^2 u = (a - e \cos u)^2 \Rightarrow r = a(1 - \epsilon \cos u). \quad (37)$$

Mit (24) und (28) folgt daraus

$$1 - \epsilon \cos u = \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \varphi}. \quad (38)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x}{r} = \frac{a \cos u - e}{a(1 - \epsilon \cos u)} = \frac{\cos u - \epsilon}{1 - \epsilon \cos u}, \\ \sin \varphi &= \frac{y}{r} = \frac{b \sin u}{a(1 - \epsilon \cos u)} = \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin u}{1 - \epsilon \cos u}. \end{aligned} \quad (39)$$

Damit folgt

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin u}{\cos u - \epsilon}. \quad (40)$$

Weiter erhalten wir nach einiger Rechnung

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \stackrel{(39)}{=} \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} \tan \frac{u}{2}. \quad (41)$$

Wir können nun die Zeitabhängigkeit der Bewegung implizit vermöge u ausdrücken. Dazu berechnen wir

$$\frac{dt}{du} = \frac{dt}{d\varphi} \frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{d\varphi}{du} = \frac{\mu r^2}{\ell} \frac{d\varphi}{du}. \quad (42)$$

Leiten wir (38) nach φ ab, erhalten wir

$$\epsilon \sin u u'(\varphi) = \frac{(1 - \epsilon^2) \epsilon \sin \varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2} \stackrel{(24)}{=} \frac{(1 - \epsilon^2) \epsilon \sin \varphi}{r^2} p^2 = \frac{(1 - \epsilon^2)^{3/2} \epsilon r \sin u}{a(1 - \epsilon^2)^2} \Rightarrow u'(\varphi) = \frac{r}{a \sqrt{1 - \epsilon^2}}, \quad (43)$$

d.h. für alle Planeten im Sonnensystem ist näherungsweise $T^2/a^3 = \text{const}$, und das ist das 3. Keplersche Gesetz.

wobei wir im vorletzten Schritt

$$r \sin \varphi = y = y' = b \sin u = a \sqrt{1 - \epsilon^2} \sin u \quad (44)$$

benutzt haben. Dies verwenden wir nun in (42)

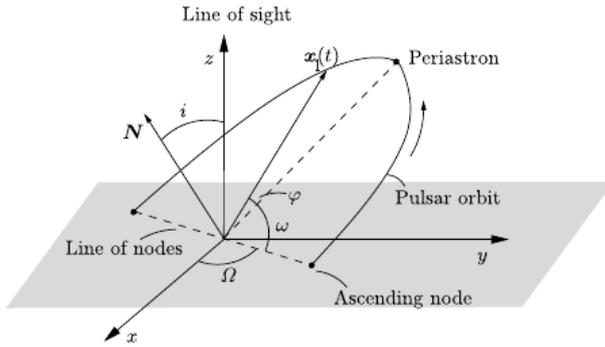
$$\frac{dt}{du} = \frac{\mu r^2}{\ell u'(\varphi)} = \frac{\mu a b}{\ell} (1 - \epsilon \cos u) \stackrel{(32)}{=} \frac{P_b}{2\pi} (1 - \epsilon \cos u). \quad (45)$$

Integrieren wir dies nach u , erhalten wir

$$t - t_0 = \frac{P_b}{2\pi} (u - \epsilon \sin u), \quad (46)$$

wobei t_0 ein Zeitpunkt ist, zu dem das Doppelsternsystem den Periastron bei $u = 0$ durchläuft. Mit dieser Keplerschen Formel kann man via (41) φ als Funktion der Zeit t bestimmen.

3 Zur Änderung der Pulsperiode



Wie oben erörtert, sind die Schwankungen in der Periode der durch den Pulsar ausgesandten Radiosignale auf den Doppler-Effekt aufgrund der Bewegung des Pulsars um den gemeinsamen Schwerpunkt des Doppelsternsystems zurückzuführen. Wir benötigen dazu die Relativgeschwindigkeit des Pulsars in Richtung der Sichtlinie von der Erde zum Doppelsternsystem, d.h. wir müssen das eben benutzte bequeme Koordinatensystem in der Bahnebene in eine geeignet verdrehtes System umrechnen (vgl. die nebenstehende Skizze, die aus [Str13] stammt: Dabei ist der Koordinatenursprung in den Schwerpunkt des Doppelsternsystems gelegt die z -Achse weist in Richtung Erde („Sichtlinie“). Die Bahnebene (also unser ursprüngliches Bezugssystem) schneidet die xy -Ebene in der Knotenlinie. Diese ist durch den Einheitsvektor in Richtung des „aufsteigenden“ Knotens

gekennzeichnet. Dabei ist Ω die Länge des aufsteigenden Knotens. Der Vektor

$$\vec{K} = \cos \Omega \vec{e}_x + \sin \Omega \vec{e}_y, \quad (47)$$

steht senkrecht auf der Bahnebene. Der Winkel i heißt Inklinationswinkel. Weiter ist ω der Winkel zwischen der Knotenlinie und der großen Halbachse der Pulsar-Bahnellipse; φ behält die obige Bedeutung bei, d.h. gibt den Winkel der momentanen Position des Pulsars zum Periastron an. Die Bahnkurve des Pulsars ist bzgl. des Beobachtersystems ist demnach mit $\theta = \omega + \varphi$ durch

$$\vec{N} = \frac{\vec{\ell}}{\ell} = \sin i \sin \Omega \vec{e}_x - \sin i \cos \Omega \vec{e}_y + \cos i \vec{e}_z \quad (48)$$

steht senkrecht auf der Bahnebene. Der Winkel i heißt Inklinationswinkel. Weiter ist ω der Winkel zwischen der Knotenlinie und der großen Halbachse der Pulsar-Bahnellipse; φ behält die obige Bedeutung bei, d.h. gibt den Winkel der momentanen Position des Pulsars zum Periastron an. Die Bahnkurve des Pulsars ist bzgl. des Beobachtersystems ist demnach mit $\theta = \omega + \varphi$ durch

$$\vec{x}_1 = r_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \Omega - \sin \theta \sin \Omega \cos i \\ \cos \theta \sin \Omega + \sin \theta \cos \Omega \cos i \\ \sin \theta \sin i \end{pmatrix} \quad (49)$$

gegeben. Gemäß (4) gilt dabei

$$r_1 = \frac{m_2}{M} r. \quad (50)$$

Die Schwankungen in der Pulsperiode sind nun durch die Relativgeschwindigkeit \dot{z}_1 des Pulsars zum Beobachter gemäß

$$f_{\text{pulsar}} = f_{0\text{pulsar}} \sqrt{\frac{1 + \dot{z}_1/c}{1 - \dot{z}_1/c}} \simeq f_{0\text{pulsar}} \left(1 + \frac{\dot{z}_1}{c}\right). \quad (51)$$

gegeben. Es gilt nun offenbar

$$z_1 = r_1 \sin i \sin(\omega + \varphi) \Rightarrow \dot{z}_1 = \dot{r}_1 \sin i \sin(\omega + \varphi) + r_1 \dot{\varphi} \sin i \cos(\omega + \varphi). \quad (52)$$

Aus (12), (25-29) und (33) folgt

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{P_b(1 - \epsilon^2)^{3/2}} (1 + \epsilon \cos \varphi)^2 \quad (53)$$

und

$$\dot{r}_1 = \frac{2\pi a_1}{P_b \sqrt{1 - \epsilon^2}} \epsilon \sin \varphi. \quad (54)$$

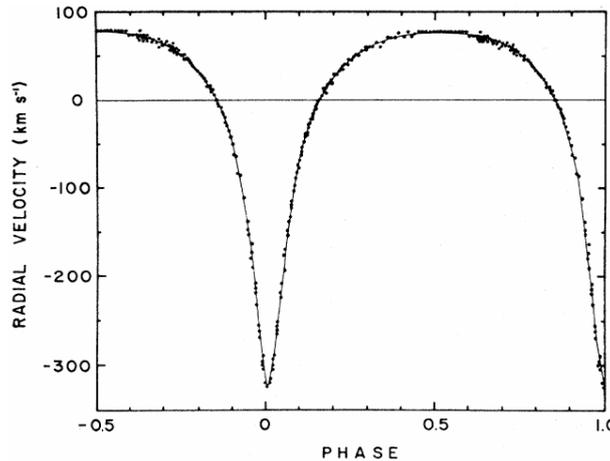
Dabei ist

$$\frac{2\pi a_1}{P_b} = \frac{\sqrt{GM}}{a^{3/2}} \frac{m_2}{M} a = \sqrt{\frac{GM}{a}} \frac{m_2}{M} = \frac{\sqrt{G} m_2^{3/2}}{M \sqrt{a_1}}. \quad (55)$$

Setzen wir nun (53-55) in (52) ein, erhalten wir schließlich nach einigen Umformungen

$$\dot{z}_1 = \frac{2\pi a_1 \sin i}{P_b \sqrt{1 - \epsilon^2}} [\cos(\varphi + \omega) + \epsilon \cos \omega] \quad (56)$$

Durch einen Fit dieser Formel an die über (51) gemessene Geschwindigkeitskurve (aus [Hul94])



ließen sich die Keplerschen Bahnparameter P_b , $a_1 \sin i$, ϵ , ω und t_0 mit erstaunlicher Präzision bestimmen.

Für den Hulse-Taylor-Pulsar PSR B1913+16 ergeben sich die Keplerschen Parameter [Wil14] $a_1 \sin i = 2.341782(3)$ sc, $\epsilon = 0.6171334(5)$, $P_b = 0.322997448911(4)$ d, $\omega = 292.54472(6)^\circ$. Die Periastronepoche wird als modifiziertes Julianisches Datum angegeben: $t_0 = 52144.90097841(4)$ MJD³.

³s. z.B. https://en.wikipedia.org/wiki/Julian_day

4 Relativistische Korrekturen

Wie wir bereits oben bemerkt haben, kann man das allgemein-relativistische Zweikörperproblem nicht exakt lösen. Bei den Doppelsternsystemen kann aber glücklicherweise bereits viel mit der nichtrelativistischen Näherung beschrieben werden, wie wir oben gesehen haben. Allerdings rührt das große Interesse an den Doppelsternsystemen nicht zuletzt daher, daß relativistische Korrekturen ausgeprägter sind als z.B. in unserem Sonnensystem und daher die empirische Überprüfung der Vorhersagen der ART ermöglichen. Daher wurde der sog. „parametrized post-Newtonian formalism“ (PPN formalism) entwickelt (vgl. den Review zu experimentellen Tests der ART [Wil14]). Dabei wird angenommen, daß man es mit schwachen Gravitationsfeldern zu tun hat und mit einer metrischen Gravitationstheorie ähnlich wie bei der ART, und man parametrisiert die Metrik ausgehend von der Newtonschen Näherung mit diversen Parametern. Der ART entsprechen dann bestimmte Werte für diese Parameter, die man durch entsprechende Entwicklungen der vollständigen ART um den Newtonschen Limes erhält. Bei gegebener Metrik kann man dann die Bewegungsgleichungen (die in metrischen Gravitationstheorien wie in der ART den Geodäten in der durch die Metrik bestimmten Raumzeit entsprechen) für das Zweikörperproblem, ausgehend von der oben besprochenen Newtonschen Näherung lösen.

Die Genauigkeit der Pulsar-Timing-Messungen erlaubt es, die entsprechenden relativistischen Korrekturen aufzulösen. Dazu müssen die Ankunftszeiten gegenüber der rein Newtonschen Analyse von oben für diverse relativistische Effekte (sowohl im Doppelsternsystem als auch im Sonnensystem berücksichtigt werden). Dazu zählen der Retardierungseffekt für die Signale aufgrund der Bewegungen im Doppelsternsystem und der Erde im Sonnensystem (Rømer-Korrektur), aufgrund der Aberration aufgrund dieser Bewegungen, die Einsteinsche Zeitverzögerung (Gravitationsrotverschiebung und Zeitdilatation im Doppelsternsystem) sowie der Shapiro-Effekt. Diese Effekte lassen sich mit dem PPN-Formalismus berechnen und die Pulsar-Timing-Resultate an die entsprechenden Parameter fiten.

Neben den oben bestimmten Keplerschen Parametern erhält man noch fünf weitere post-Keplersche Parameter: die mittlere Periastrondrehung $\langle\dot{\omega}\rangle$ (analog wie beim Merkur), Variationen in den Pulsankunftszeiten aufgrund von variabler Gravitationsrotverschiebung und Zeitdilatation wegen der Bahnbewegung auf stark elliptischen Bahnen der Sterne γ' , die Änderung der Doppelsternbahnperiode aufgrund der Abstrahlung von Gravitationswellen \dot{P}_b (vgl. Aufgabe 2 auf Übungsblatt 1) sowie die Stärke (range, r) und Form (shape, s) der Shapirozeitverzögerung der Pulse aufgrund des Begleitsterns im Doppelsternsystem. Die ART in PPN-Näherung läßt dann die Bestimmung der beiden Massen m_1 und m_2 zu. Die 5 Parameter sind aber überbestimmt, d.h. man kann die ART überprüfen, indem man evtl. Diskrepanzen in den gemessenen post-Keplerschen Parametern nachweist.

Für den Hulse-Taylor-Pulsar findet man $\langle\dot{\omega}\rangle = 4.226598(5)^\circ/\text{yr}$, $\gamma' = 4.2992(8) \text{ ms}$ und $\dot{P}_b = -2.423(1) \cdot 10^{-12}$. Leider lassen sich die Shapiro-Verzögerungsparameter r und s nicht sehr gut bestimmen, da der Shapiro-Effekt wegen $i \simeq 47^\circ$ klein ist. Aus den ersten beiden Parametern ergeben sich die Massen zu $m_1 = 1.4398 \pm 0.0002 M_\odot$ und $m_2 = 1.3886 \pm 0.0002 M_\odot$. Daraus ergibt sich übrigens der eben angegebene Wert für i mittels (55) und dem oben angegebenen Wert für $a_1 \sin i$.

Literatur

[Hul94] R. A. Hulse, *The discovery of the binary pulsar*, Rev. Mod. Phys. **66**, 699 (1994).
<http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.66.699>

[Str13] N. Straumann, *General Relativity*, 2. Aufl., Springer, Dordrecht, Heidelberg, New York, London (2013).

<http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-5410-2>

- [Tay94] J. H. Taylor, *Binary pulsars and relativistic gravity*, Rev. Mod. Phys. **66**, 711 (1994).
<http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.66.711>
- [Wil14] C. M. Will, *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, Living Reviews in Relativity **17**, 4 (2014).
<http://dx.doi.org/10.12942/lrr-2014-4>
- [WT05] J. M. Weisberg, J. H. Taylor, *The Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis*, in F. A. Rasio, I. H. Stairs, Hg., *Binary Radio Pulsars*, Bd. 328 von *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, 25 (2005).
<http://adsabs.harvard.edu/abs/2005ASPC..328...25W>