S. Leupold, H. van Hees **Wintersemester 2008/9**

Übungen zur Höheren Quantenmechanik

Abgabedatum: 29.10.2008

Blatt 1

Aufgabe 1 (Spin 1/2)

Die Spinmatrizen zum Spin $s = 1/2$ lauten in der Standarddarstellung, in der $\mathbf{s}_3$ diagonal ist,

$$\mathbf{s}_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, daß diese Spinmatrizen die Kommutatorregeln für Drehimpulse

$$[\mathbf{s}_a, \mathbf{s}_b] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{abc}\mathbf{s}_c \tag{2}$$

erfüllen. Dabei bezeichnet ϵ_{abc} das sogenannte Levi-Civita-Symbol, das vollständig antisymmetrisch unter Vertauschungen der Indizes a, b und c ist und für das $\epsilon_{123} = 1$ gilt. In (2) wird über den wiederholten Index c von 1 bis 3 summiert (Einsteinsche Summationskonvention). Überprüfen Sie, daß in dieser Basis das Spinbetragsquadrat $\vec{\mathbf{s}}^2$ ebenfalls eine Diagonalmatrix ist. Was sind die entsprechenden Eigenwerte dieses Operators?

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des Operators $\mathbf{s}_1$.

(c) Angenommen, ein Elektron sei mit Hilfe einer Stern-Gerlach-Apparatur so präpariert, daß seine s_3-Komponente den Wert $\sigma_3 = +\hbar/2$ besitzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man bei einer Messung der s_1-Komponente den Wert $\sigma_1 = -\hbar/2$ erhält?

(d) Berechnen Sie den unitären Operator

$$\mathbf{U}_3(\varphi) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varphi\mathbf{s}_3\right). \tag{3}$$

(e) Seien $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Einheitsvektor ($|\vec{n}| = 1$) und

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{2}{\hbar}\vec{\mathbf{s}} \tag{4}$$

die Paulischen Spinmatrizen.

Zeigen Sie, daß

$$\mathbf{U}_{\vec{n}}(\varphi) := \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}\vec{n}\vec{\boldsymbol{\sigma}}\right) = \mathbf{1}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \mathrm{i}\vec{n}\vec{\boldsymbol{\sigma}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \tag{5}$$

gilt und unitär ist.

Lösungshinweise zu (e): Für die Berechnung des Operatorexponentials muß man die Reihenentwicklung nach Potenzen des Operators benutzen (s. Vorlesung). Dazu zeige man zunächst, daß

$$(\vec{n}\vec{\boldsymbol{\sigma}})^2 = \mathbf{1} \tag{6}$$

gilt. Dann benötigt man noch die Potenzreihenentwicklungen von cos und sin:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Bemerkung: $\mathbf{U}_{\vec{n}}(\varphi)$ entspricht im folgenden Sinne Drehungen im $\mathbb{R}^3$. Definiert man für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ den Operator

$$\tilde{\mathbf{x}} = \vec{x}\vec{\boldsymbol{\sigma}}, \tag{8}$$

so kann man mit Hilfe von Gl. (5) zeigen, daß

$$\mathbf{U}_{\vec{n}}(\varphi)\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{U}^{\dagger}_{\vec{n}}(\varphi) = \tilde{\mathbf{x}'} = \vec{x}\,'\vec{\boldsymbol{\sigma}} \tag{9}$$

mit

$$\vec{x}\,' = (\vec{n}\vec{x})\vec{n} + [\vec{x} - (\vec{n}\vec{x})\vec{n}]\cos\varphi + (\vec{n} \times \vec{x})\sin\varphi \tag{10}$$

ist, daß also $\vec{x}\,'$ aus $\vec{x}$ durch Drehung um den Drehwinkel φ um die Drehachse $\vec{n}$ im Sinne der Rechtehandregel hervorgeht.

Empfohlene Literatur:

J. J. Sakurai, Modern Quantum Mechanics, Addison Wesley
E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, Aula-Verlag
L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band III Quantenmechanik, Akademie-Verlag