S. Leupold, H. van Hees **Wintersemester 2008/9**

Übungen zur Höheren Quantenmechanik

Abgabedatum: 03.02.2009

Blatt 11

Notation für relativistische Quantenmechanik

Im folgenden verwenden wir in den Übungen „natürliche Einheiten” mit $c = 1$ und $\hbar = 1$. Vierervektoren bezeichnen wir mit einfachen Symbolen, z.B. $x = (x^\mu) = (t, \vec{x})$, während Dreiervektoren mit einem Pfeil bezeichnet werden. Griechische obere oder untere Indizes laufen von 0 bis 3, lateinische von 1 bis 3. Die Minkwoskimetrik definieren wir durch $(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ („Westküstenkonvention”). Lorentztransformationen werden durch Matrixelemente ${\Lambda^\mu}_\nu$ gegeben. Sie erfüllen die Bedingungen

$$ {\Lambda^0}_0 \geq 1, \quad g_{\mu\nu}{\Lambda^\mu}_\rho{\Lambda^\nu}_\sigma = g_{\rho\sigma}, \quad \det({\Lambda^\mu}_\nu) = +1. \tag{1} $$

Dabei wird stillschweigend über gleichnamige Indexpaare, von denen stets ein Index oben und der der andere unten zu stehen kommt, von 0 bis 3 summiert (Einsteinsche Summationskonvention). Invariante Produkte von zwei Vierervektoren x und y werden wie folgt notiert

$$ x \cdot y = g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}, \tag{2} $$

wobei

$$ \vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \tag{3} $$

das gewöhnliche Euklidische Skalarprodukt von Dreiervektoren bedeutet. Weiter definieren wir für Vierer- bzw. Dreiervektoren

$$ x^2 = x \cdot x, \quad \vec{x}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}. \tag{4} $$

Der Punkt im Minkowski- oder euklidischen Produkt kann auch weggelassen werden.
Das invariante Dreierimpulsintegral schreiben wir als

$$ \int \widetilde{\mathrm{d}^3\vec{p}}\, f(\vec{p}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{2E_{\vec{p}}\,(2\pi)^3} f(\vec{p}) \tag{5} $$

Aufgabe 1 (Kommutarrelation mit Impulsoperator)

In der vorigen Übung haben wir gezeigt, daß der Operator des Gesamtimpulses des quantisierten Klein-Gordon-Feldes durch

$$ \vec{\mathbf{P}} = \int \widetilde{\mathrm{d}^3\vec{p}}\, \vec{p}\, \mathbf{a}^\dagger(\vec{p})\mathbf{a}(\vec{p}) \tag{6} $$

gegeben ist. Zeigen Sie, daß dieser Operator die folgende Kommutatorrelation mit dem Klein-Gordon-Feldoperator $\boldsymbol{\phi}(x)$ erfüllt:

$$ \left[\boldsymbol{\phi}(x), \vec{\mathbf{P}}\right] = \frac{1}{\mathrm{i}} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \boldsymbol{\phi}(x). \tag{7} $$

bitte wenden!

Aufgabe 2 (Propagator des Klein-Gordon-Feldes)
Der zeitgeordnete Propagator des Klein-Gordon Feldes ist durch

$$\mathrm{i}G(x-x') = \langle 0 \,| \mathcal{T}\boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{\phi}(x') |\, 0\rangle := \Theta(t-t')\,\langle 0\,|\boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{\phi}(x')|\,0\rangle + \Theta(t'-t)\,\langle 0\,|\boldsymbol{\phi}(x')\boldsymbol{\phi}(x)|\,0\rangle \tag{8}$$

definiert, wobei $|0\rangle$ den Vakuumzustand und $\mathcal{T}$ den Zeitordnungsoperator bezeichnen[1]. Der Propagator im Impulsraum $\tilde{G}(p)$ ist durch die Fouriertransformierte von G, also

$$G(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \exp(-\mathrm{i}p\cdot x)\tilde{G}(p), \tag{9}$$

definiert.
Zeigen Sie, daß der Propagator im Impulsraum durch

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}, \tag{10}$$

gegeben ist, wobei ϵ eine sehr kleine positive Zahl ($\epsilon \to 0^+$ im Sinne von Distributionen) bezeichnet.

Anleitung:

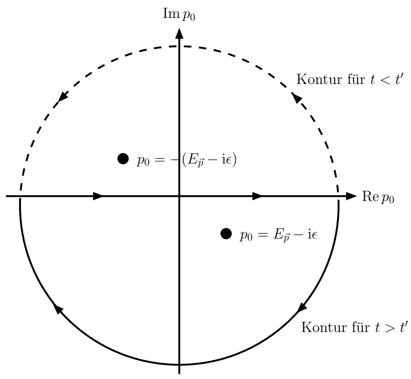

Abbildung 1: *Die Integrationskonturen zur Ausführung der Integrale (12) und die Lage der Pole des Integranden in der komplexen p_0-Ebene.*

Entwickeln Sie die Feldoperatoren in der Definition des Propagators (8) nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \int \widetilde{\mathrm{d}^3\vec{p}} \left[\mathbf{a}(\vec{p})\exp(-\mathrm{i}p\cdot x) + \mathbf{a}^\dagger \exp(\mathrm{i}p\cdot x)\right]_{p^0 = E_{\vec{p}}}. \tag{11}$$

Vereinfachen Sie den entstehenden Ausdruck mit Hilfe der Kommutatorrelationen für die Erzeuger und Vernichter und führen Sie eines der beiden Impulsintegrale aus.

Zeigen Sie dann analog wie in Übungsblatt 9 unter Verwendung des Residuensatzes, daß die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Theta(t)\exp(-\mathrm{i}E_{\vec{p}}\,t) &= \int \mathrm{d}p_0 \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\frac{\exp(-\mathrm{i}p_0 t)}{p_0 - (E_{\vec{p}} - \mathrm{i}\epsilon)}, \\ \Theta(-t)\exp(+\mathrm{i}E_{\vec{p}}\,t) &= -\int \mathrm{d}p_0 \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\frac{\exp(-\mathrm{i}p_0 t)}{p_0 + (E_{\vec{p}} - \mathrm{i}\epsilon)} \end{aligned} \tag{12}$$

gelten. Durch Anwendung dieser Gleichungen ergibt sich dann nach einigen algebraischen Umformungen die zu beweisende Relation (9) mit dem Impulsraumpropagator (10).

[1]Wir haben benutzt, daß der Vakuumzustand invariant unter raum-zeitlichen Translationen ist und daher der Propagator nur von der Differenz $x - x'$ der Raumzeitargumente abhängen kann.