**S. Leupold, H. van Hees** **Wintersemester 2008/9**

# Übungen zur Höheren Quantenmechanik

**Abgabedatum: 10.02.2009**

## Blatt 12

### Aufgabe 1 (Diracgleichung in der chiralen Darstellung)

Die in der Vorlesung getroffene Wahl der Diracmatrizen, die **Dirac-Pauli-Darstellung**, ist besonders bequem, wenn der nichtrelativistische Limes betrachtet werden soll. In dieser Übung betrachten wir eine alternative Möglichkeit, die **chirale Darstellung**, die besonders geeignet ist, um den ultrarelativistischen Fall und masselose Teilchen zu behandeln. Dazu führen wir zunächst die vierdimensionale Vektoren mit komplexen $2 \times 2$-Matrizen als Komponenten

$$\sigma^\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \bar{\sigma}^\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{1}$$

ein. Dabei sind die $\sigma^j$ $(j \in \{1, 2, 3\})$ die üblichen Paulischen Spinmatrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Die Diracmatrizen in der chiralen Darstellung lassen sich dann in der folgenden Blockdarstellung angeben:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

wobei hier die 0 die $2 \times 2$-Nullmatrix bezeichnen soll.

(a) Zeigen Sie, daß diese Diracmatrizen die Antikommutatorrelationen erfüllen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}. \tag{4}$$

**Hinweis:** Berechnen Sie für beliebige Vierervektoren $x$ und $y$ zunächst die Matrizen $\not{x} = x_\mu \gamma^\mu$ und $\not{y}$ und zeigen Sie dann, daß $\not{x}\not{y} + \not{y}\not{x} = 2x \cdot y\,\mathbf{1}$ ist. Dies impliziert dann die zu beweisenden Antikommutatorrelationen (4) (warum?).

(b) Zeigen Sie nun, daß die Diracgleichung

$$(\mathrm{i}\not{\partial} - m\mathbf{1})\psi(x) = 0 \tag{5}$$

jeweils zwei linear unabhängige Ebene-Wellen-Lösungen mit positiver bzw. negativer Frequenz

$$\psi(x) = u \exp(-\mathrm{i}x \cdot p), \quad \psi(x) = v \exp(\mathrm{i}x \cdot p) \tag{6}$$

mit $p^0 = E_{\vec{p}} = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ besitzt. Schreiben Sie dazu

$$u = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{7}$$

mit den zweikomponentigen Spinoren $\xi$ („obere Komponenten”) und $\eta$ („untere Komponenten”) und ermitteln Sie analog zur Vorlesung die Beziehung zwischen $\xi$ und $\eta$ aus der Diracgleichung.

(c) Der Limes $m \to 0$ ist für die in (b) ermittelten Lösungen problematisch. Zeigen Sie, daß auch die beiden folgenden linear unabhängigen Lösungen mit positiver Frequenz durch

$$u(\vec{p}, s) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma}\, \eta(s) \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}\, \eta(s) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

gegeben sind, wobei

$$\eta(s = 1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta(s = -1/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

ist[1].

**Hinweis:** Die Wurzeln von positiv semidefiniten Matrizen $A$ sind dadurch eindeutig definiert, daß deren Eigenwerte positiv gewählt werden und ansonsten die Gleichung $\sqrt{A}\sqrt{A} = A$ erfüllen[2].

Zeigen Sie auch, daß die Spinoren (8) Orthogonalitätsrelationen

$$u^\dagger(\vec{p}, s) u(\vec{p}, s') = 2E_{\vec{p}}\, \delta_{ss'} \tag{10}$$

erfüllen.

### Freiwillige Zusatzaufgaben

(d) Wie lauten die analogen Lösungen $v$ zu ebenen Wellen mit negativer Frequenz?

(e) Betrachten Sie nun den Fall masseloser Teilchen (also $m = 0$). Zeigen Sie insbesondere, daß die Gleichungen für die oberen und unteren Komponenten in diesem Fall entkoppeln, und daß die Lösungen (8) auch für $m = 0$ die korrekten Lösungen sind.

---

[1] Beachten Sie, daß $u$ vierdimensionale Diracspinoren sind und die Einträge in (8) zwei zweidimensionale Weylspinoren sind.

[2] Interessierte können zeigen, daß $p \cdot \sigma$ und $p \cdot \bar{\sigma}$ in der Tat positive Eigenwerte besitzen.