S. Leupold, H. van Hees **Wintersemester 2008/9**

Übungen zur Höheren Quantenmechanik

Abgabedatum: 18.11.2008

Blatt 4

Aufgabe 1 (Dynamik des harmonischen Oszillators)

Wir betrachten die Zeitentwicklung des harmonischen Oszillators im **Heisenbergbild**, wo die Orts- und Impulsoperatoren zeitabhängig sind und sich gemäß den Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\mathbf{x}, \mathbf{H}], \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\mathbf{p}, \mathbf{H}] \tag{1}$$

zeitlich entwickeln.

(a) Zeigen Sie, daß die Lösung der Bewegungsgleichungen formal durch

$$\mathbf{x}(t) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathbf{H}t\right)\mathbf{x}_0 \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathbf{H}t\right), \quad \mathbf{p}(t) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathbf{H}t\right)\mathbf{p}_0 \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathbf{H}t\right) \tag{2}$$

gegeben ist, wenn $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{p}_0$ die Operatoren für Ort und Impuls zur Zeit $t = 0$ bezeichnen.

Bestimmen Sie andererseits die Kommutatoren in (1) mit dem Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega}{2}\mathbf{x}^2 \tag{3}$$

und lösen Sie die Bewegungsgleichungen.

(b) Berechnen Sie den Kommutator des Ortsoperators $\mathbf{x}(t)$ mit dem Impulsoperator $\mathbf{p}(t')$ zur *von t verschiedenen Zeit t'*!

(c) Die Eigenvektoren des Ortsoperators sind durch

$$\mathbf{x}(t)\,|t, x\rangle = x\,|t, x\rangle \tag{4}$$

definiert. Zeigen Sie dann, daß für einen beliebigen Zustandsvektor $|\psi\rangle$ die Wellenfunktion $\psi(t, x) := \langle t, x \,|\, \psi\rangle$ die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(t, x)}{\partial t} = \mathbf{H}\psi(t, x) \tag{5}$$

erfüllt. (Im Heisenbergbild ist der Zustandsvektor $|\psi\rangle$ selbst zeitunabhängig!)

Hinweis: Zeigen Sie erst mit Hilfe von (2), daß die Zeitabhängigkeit der Eigenvektoren durch

$$|t, x\rangle = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathbf{H}t\right)|t = 0, x\rangle \tag{6}$$

gegeben ist und bilden Sie dann die Zeitableitung von $\psi(t, x)$.

(d) Der Zustand des harmonischen Oszillators zur Zeit $t = 0$ sei durch eine beliebige Ortswellenfunktion $\psi_0(x) = \langle t = 0, x \,|\, \psi \rangle$ gegeben. Dann folgt aus Teilaufgabe (b), daß die Wellenfunktion zu Zeiten $t > 0$ durch

$$\psi(t, x) = \langle t, x \,|\, \psi \rangle = \int \mathrm{d}x' \underbrace{\langle t, x \,|\, t = 0, x' \rangle}_{U(t;x,x')} \underbrace{\langle t = 0, x' \,|\, \psi \rangle}_{\psi_0(x')} := \int \mathrm{d}x' U(t; x, x') \psi_0(x') \tag{7}$$

gegeben ist. Drücken Sie den Propagator $U(t; x, x')$ mit Hilfe der Energieeigenfunktionen aus Aufgabe 1 aus.

Hinweis: Gemäß (6) und der Vollständigkeit der Energieeigenfunktionen können Sie schreiben

$$\begin{aligned} U(t; x, x') := \langle t, x \,|\, t = 0, x' \rangle &= \left\langle t = 0, x \middle| \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathbf{H}t\right) \middle| t = 0, x' \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle t = 0, x \middle| \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathbf{H}t\right) \middle| n \right\rangle \langle n \,|\, t = 0, x' \rangle \,. \end{aligned} \tag{8}$$

(e) (**Freiwillige Zusatzaufgabe für Mathematikfans!**)

Berechnen Sie den expliziten Ausdruck für den Propagator durch Summation der Reihe (8).

Hinweis: Die oben erwähnten Hermite-Polynome lassen sich wegen

$$\exp(-\xi^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u \exp(-u^2 + 2\mathrm{i}\xi u) \tag{9}$$

gemäß Übungsblatt 3 vermöge

$$\mathrm{H}_n(\xi) = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n} \exp(-\xi^2) = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{(2\mathrm{i})^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u u^n \exp(-u^2 + 2\mathrm{i}\xi u) \tag{10}$$

als Integral schreiben. Drücken Sie die beiden in der Reihe (8) auftretenden Hermite-Polynome durch ein entsprechendes Doppelintegral aus. Dabei entsteht eine Reihe, die Sie sofort resummieren können. Das dann verbleibende Doppelintegral ist ein Gaußintegral und läßt sich daher geschlossen hinschreiben!