**S. Leupold, H. van Hees** **Wintersemester 2008/9**

# Übungen zur Höheren Quantenmechanik

**Abgabedatum: 16.12.2008**

## Blatt 7

**Aufgabe 1 (Eigenschaften des statistischen Operators)**

In der Vorlesung wurde der allgemeine statistische Operator $\boldsymbol{\rho}$ für einen gemischten Zustand eingeführt. Im Heisenbergbild ist er zeitunabhängig[1] und besitzt die Form

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_{ij} d_{ij} \left| a_i, t_1 \right\rangle \left\langle a_j, t_1 \right| , \tag{1}$$

wobei die $|a_i, t_1\rangle$ die Eigenzustände des zu einer Observablen $A$ zur Zeit $t_1$ gehörigen Operators $\mathbf{A}(t_1)$ bezeichnet. Die $d_{ij}$ sind dabei so gewählt, daß $\boldsymbol{\rho}$ hermitesch ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß zur Zeit $t_2$ eine beliebige Observable $B$ den Wert $b_k$ besitzt, ist dann

$$P(b_k, t_2) = \langle b_k, t_2 \left| \boldsymbol{\rho} \right| b_k, t_2 \rangle , \tag{2}$$

wobei $|b_k, t_2\rangle$ der Eigenvektor von $\mathbf{B}(t_2)$ zum Eigenwert $b_k$ ist.

(a) Zeigen Sie, daß aufgrund der Hermitezität von $\boldsymbol{\rho}$ folgt, daß

$$d_{ij} = d_{ji}^*. \tag{3}$$

(b) Zeigen Sie aus den Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten $P(b_k, t_2)$, daß $\boldsymbol{\rho}$ ein positiv semidefiniter Operator und

$$\mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\rho} = \sum_i d_{ii} = 1 \tag{4}$$

sein muß.

**Hinweis:** Für die Wahrscheinlichkeiten gilt

$$0 \leq P(b_k, t_2) \leq 1, \quad \sum_k P(b_k, t_2) = 1. \tag{5}$$

(c) Zeigen Sie, daß der Fall des reinen Zustandes, der durch einen normierten Zustandsvektor

$$|\psi, t_1\rangle = \sum_i c_i(t_1) \left| a_i, t_1 \right\rangle \tag{6}$$

charakterisiert ist, durch die Form

$$d_{ij} = c_i c_j^* \tag{7}$$

der Koeffizienten $d_{ij}$ gegeben ist und daß ein so definierter statistischer Operator die Eigenschaften aus den vorigen Teilaufgaben erfüllt.

[1] Aus der allgemeinen Bewegungsgleichung für einen Operator im Heisenbergbild folgt, daß $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}/\mathrm{d}t = 1/(\mathrm{i}\hbar)\,[\boldsymbol{\rho}, \mathbf{H}] + (\partial \boldsymbol{\rho}/\partial t)_{\text{expl}} = 0$, also $\boldsymbol{\rho}$ i.a. explizit zeitabhängig sein muß! Ein Gleichgewichtszustand zeichnet sich dadurch aus, daß $\boldsymbol{\rho}$ *nicht* explizit zeitabhängig ist, also mit $\mathbf{H}$ kommutiert und folglich eine Funktion der Erhaltungsgrößen des Systems sein muß.

(d) Wie jeder hermitesche Operator besitzt auch $\boldsymbol{\rho}$ ein vollständiges Eigenvektorsystem $|p_i\rangle$ zu Eigenwerten $p_i$:

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_i p_i \, |p_i\rangle \, \langle p_i| \, . \tag{8}$$

Zeigen Sie, daß $p_i \geq 0$ und $\sum_i p_i = 1$.

(e) Zeigen Sie, daß ein positiv semidefiniter hermitescher Operator $\boldsymbol{\rho}$ mit $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\rho} = 1$ genau dann der im Sinne von Teilaufgabe (c) zu einem reinen Zustand gehörige statistische Operator ist, wenn er die Projektoreigenschaft

$$\boldsymbol{\rho}^2 = \boldsymbol{\rho} \tag{9}$$

erfüllt.

**Hinweis:** Überlegen Sie, was für die Eigenwerte von $\boldsymbol{\rho}$ aus der Projektoreigenschaft folgt!