

Übungen zur Höheren Quantenmechanik

Abgabedatum: 13.01.2008

Blatt 8

Aufgabe 1 (Das ideale Fermigas)

Im thermodynamischen Gleichgewicht können wir den Zustand eines Gases durch den Statistischen Operator

$$\rho = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \mathbf{H} - \alpha \mathbf{N}) \quad \text{mit} \quad Z = \text{Tr} \exp(-\beta \mathbf{H} - \alpha \mathbf{N}) \quad (1)$$

ausdrücken.

- (a) Berechnen Sie mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe auf dem Übungsblatt 6 die Zustandssumme Z bzw. den Logarithmus $\ln Z$ für Fermionen.
- (b) Für $\ln Z$ können die auftretenden Summen über die Impulse durch ein Integral genähert werden

$$\sum_{\vec{p}} f(\vec{p}) \simeq V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} f(\vec{p}). \quad (2)$$

Betrachten Sie dann die Zustandssumme im klassischen Limes, für den die Exponentialfunktionen als klein gegen 1 angesehen werden können und berechnen Sie die mittlere Energie und Teilchenzahl

$$U = \langle \mathbf{H} \rangle = \text{Tr}(\rho \mathbf{H}) = -\frac{\partial(\ln Z)}{\partial \beta}, \quad \bar{N} = \langle \mathbf{N} \rangle = \text{Tr}(\rho \mathbf{N}) = -\frac{\partial(\ln Z)}{\partial \alpha}. \quad (3)$$

- (c) Berechnen Sie weiter die Entropie

$$S = -k \langle \ln \rho \rangle = -k \text{Tr}(\rho \ln \rho). \quad (4)$$

Dabei ist $k = 1.3806504(24) \cdot 10^{-23} \text{J/K}$ die Boltzmannkonstante.

- (d) Betrachten Sie nun den ersten Hauptsatz der Thermodynamik in der Form

$$dS = \frac{1}{T}(dU + p dV - \mu d\bar{N}). \quad (5)$$

Drücken Sie also die Entropie aus (c) als Funktion der unabhängigen Größen U , V und \bar{N} aus und bestimmen Sie die Thermodynamischen Größen Temperatur T , Druck p und chemisches Potential μ aus den aus (5) folgenden Beziehungen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V, \bar{N}} = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U, \bar{N}} = \frac{p}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{N}}\right)_{U, V} = -\frac{\mu}{T}. \quad (6)$$