S. Leupold, H. van Hees **Wintersemester 2008/9**

Übungen zur Höheren Quantenmechanik

Abgabedatum: 20.01.2009

Blatt 9

Aufgabe 1 (Verallgemeinerte Ableitung von Distributionen)
Zur Vorbereitung auf die folgenden Aufgaben benötigen wir die Ableitung der Heavisideschen Einheitssprungfunktion

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

im verallgemeinerten Sinne einer Distribution. Eine Distribution d ist definiert durch ihre Wirkung auf „Testfunktionen”, die wir hier als die beliebig oft stetig differenzierbaren schnell fallenden Funktionen wählen. Dann ist die verallgemeinerte Ableitung einer Distribution d als die Distribution $\dot{d}$ definiert, die folgendermaßen auf Testfunktionen f wirkt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \dot{d}(t) f(t) := -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, d(t) \dot{f}(t), \tag{2}$$

wobei $\dot{f}$ die auf gewöhnliche Art definierte Ableitung der Testfunktion f bezeichnet.
Zeigen Sie, daß aufgrund dieser Definition der verallgemeinerten Ableitung

$$\dot{\Theta}(t) = \delta(t) \tag{3}$$

gilt, wobei δ die Diracsche δ-Distribution ist.

Aufgabe 2 (Nichtrelativistischer freier Propagator)
Wir betrachten nichtrelativistische Feldoperatoren für freie Teilchen wie in Übung 6, allerdings diesmal für den ganzen Raum, d.h. mit Vernichtungsoperatoren für die Impuls-Eigenvektoren

$$\boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{a}(\vec{p}) \exp\left[-\mathrm{i}\frac{t\omega(\vec{p}) - \vec{x}\vec{p}}{\hbar}\right] \quad \text{mit} \quad \omega(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}. \tag{4}$$

Die Vernichtungsoperatoren erfüllen dabei die folgenden Kommutator- bzw. Antikommutatorrelationen

$$\left[\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{a}(\vec{p}\,')\right]_{\mp} = 0, \quad \left[\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}\,')\right]_{\mp} = (2\pi\hbar)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,'). \tag{5}$$

Betrachten Sie den zeitgeordneten Propagator

$$G(t,\vec{x};t',\vec{x}\,') = -\mathrm{i}\left\langle 0 \left| \mathcal{T} \boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}) \boldsymbol{\phi}^\dagger(t',\vec{x}\,') \right| 0 \right\rangle. \tag{6}$$

Dabei ist $|0\rangle$ der Vakuumzustand, für den $\mathbf{a}(\vec{p})\,|0\rangle = 0$ für alle $\vec{p}$ gilt, und $\mathcal{T}$ bezeichnet den Zeitordnungsoperator,

$$\mathcal{T} \boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}) \boldsymbol{\phi}^\dagger(t',\vec{x}\,') = \Theta(t-t') \boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}) \boldsymbol{\phi}^\dagger(t',\vec{x}\,') \pm \Theta(t'-t) \boldsymbol{\phi}^\dagger(t',\vec{x}\,') \boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}), \tag{7}$$

wobei das obere Vorzeichen für Bosonen, das untere für Fermionen anzuwenden ist.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Bewegungsgleichung für die Feldoperatoren

$$\left(\mathrm{i}\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\Delta_{\vec{x}}}{2m}\right)\boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}) = 0 \tag{8}$$

und Gl. (3), daß der zeitgeordnete Propagator eine Greensche Funktion des obigen Differentialoperators ist, d.h. daß gilt

$$\left(\mathrm{i}\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\Delta_{\vec{x}}}{2m}\right) G(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \hbar\delta(t-t')\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'). \tag{9}$$

Hinweis:

Sie können ohne Beweis die „*gleichzeitige*“(Anti-)Kommutator-Relation

$$\left[\boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}), \boldsymbol{\phi}^\dagger(t,\vec{x}')\right]_{\mp} = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \tag{10}$$

von Übungsblatt 6 verwenden.

(b) Finden Sie unter Zuhilfenahme der Entwicklung des Feldoperators nach Vernichtungsoperatoren (4) die Impulsdarstellung $\tilde{G}(p_0,\vec{p})$ des zeitgeordneten Propagators, die durch

$$G(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}\exp\left[-\mathrm{i}\frac{(t-t')p_0 - (\vec{x}-\vec{x}')\vec{p}}{\hbar}\right]\tilde{G}(p_0,\vec{p}) \tag{11}$$

definiert ist.

(c) Berechnen Sie den zeitgeordneten Propagator in der Ortsdarstellung, indem Sie das Fourierintegral (11) ausführen.

Hinweis:

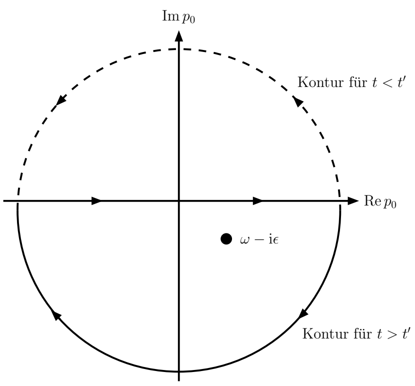

Abbildung 1: *Die Integrationskonturen zur Ausführung des Integrals (12) und die Lage des Pols des Integranden in der komplexen p_0-Ebene.*

Verwenden Sie den Residuensatz, um die folgende zur Lösung der Teilaufgaben (b) und (c) wichtige allgemeine Formel zu beweisen:

$$\Theta(t-t')\exp\left[-\mathrm{i}\frac{\omega(t-t')}{\hbar}\right]f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}}{p_0-\omega+\mathrm{i}\epsilon} \times\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p_0(t-t')\right]f(p_0), \tag{12}$$

wobei $\epsilon > 0$ sehr klein gegenüber ω zu denken ist. Sie gilt für überall analytische Funktionen f, die im komplex Unendlichen hinreichend schnell abfallen. Beachten Sie dabei, daß Sie den Integrationsweg entlang der reellen p_0-Achse für $t > t'$ in der unteren und für $t < t'$ in der oberen Halbebene durch einen sehr großen Halbkreis geschlossen denken dürfen, da dann die Integrale über diese zusätzlichen Halbkreise wegen der Exponentialfunktion 0 ergeben.