Vorlesung Höhere QM 25.11.2008

Vielteilchentheorie (Fortsetzung)

Es wurde in den vorherigen Vorlesungen der Fockraum für Bosonen/Fermionen eingeführt

	Hilbertraum
0 Teilchen (Vakuum)	$\mathcal{H}_0^\pm$
1 Teilchen $\|\vec{r}_1 \sigma)$	$\mathcal{H}_1^\pm$
2 Teilchen $\|\vec{r}_1 \sigma_1; \vec{r}_2 \sigma_2)_\pm$	$\mathcal{H}_2^\pm$
$\vdots$	$\vdots$
N Teilchen $\|\vec{r}_1 \sigma_1; \dots; \vec{r}_N \sigma_N)_\pm$	$\mathcal{H}_N^\pm$
$\vdots$	$\vdots$

$$\mathcal{H}_{Fock} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N$$

Dabei ist

$$|\vec{r}_1 \sigma_1; \vec{r}_2 \sigma_2; \dots; \vec{r}_N \sigma_N)^\pm = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in S_N} (\pm 1)^{\sigma(P)} |\vec{r}_{P(1)} \sigma_{P(1)}; \dots; \vec{r}_{P(N)} \sigma_{P(N)})$$

$P: \mathbb{N}_N = \{1, 2, \dots, N\} \to \mathbb{N}_N$ durchläuft alle Permutationen von Indizes in $\mathbb{N}_N$ (d.h. alle Bijektionen $\mathbb{N}_N \to \mathbb{N}_N$)

Im Folgenden: $\xi_k = (\vec{x}_k, \sigma_k)$

Es gilt

$$|\xi_1; \dots; \xi_j; \dots; \xi_k; \dots; \xi_N)^\pm = \pm |\xi_1; \dots; \xi_k; \dots; \xi_j; \dots; \xi_N)^\pm$$

$\Rightarrow$ Total $\left\{ \begin{matrix} \text{symmetrische} \\ \text{antisymmetrische} \end{matrix} \right\}$ Vertauschung der Einteilchenzustände $\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Bosonen} \\ \text{Fermionen} \end{matrix} \right.$

Skalarprodukt

$${}^{\pm}\langle \xi_1; \xi_2; \dots; \xi_N | \xi'_1; \xi'_2; \dots; \xi'_{N'} \rangle^{\pm} := \delta_{NN'} \sum_{P\in S_N} (\pm 1)^{\pi(P)} \prod_{i=1}^{N} \delta(\xi_i - \xi'_{P(i)})$$

$|\xi_1;\dots;\xi_N\rangle$ i.a.

mit $\delta(\xi_1 - \xi'_1) = \delta_{\sigma_1\sigma'_1}\,\delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \vec{x}'_1)$ etc.

Erzeuger und Vernichter

$$\hat\varphi^\dagger(\xi)\,\underbrace{|\xi_1;\dots;\xi_N\rangle^{\pm}}_{\in \mathcal{H}_N^{\pm}} := \underbrace{|\xi;\xi_1;\dots;\xi_N\rangle^{\pm}}_{\in \mathcal{H}_{N+1}^{\pm}}$$

$$\Rightarrow \hat\varphi^\dagger(\xi) = |\xi\rangle^{\pm\pm}\langle 0| + \int d\xi_1\, |\xi;\xi_1\rangle^{\pm\pm}\langle \xi_1| + \dots + \frac{1}{N!}\int d\xi\, |\xi;\xi_1;\dots;\xi_N\rangle^{\pm\pm}\langle \xi_1;\dots;\xi_N|$$

$$\Rightarrow \hat\varphi(\xi) = |0\rangle^{\pm\pm}\langle \xi| + \int d\xi_1\, |\xi_1\rangle^{\pm\pm}\langle \xi;\xi_1| + \dots + \frac{1}{N!}\overbrace{\int d\xi_1\cdots\int d\xi_N}\, |\xi_1;\dots;\xi_N\rangle^{\pm\pm}\langle \xi;\xi_1;\dots;\xi_N| + \dots$$

$$\boxed{\begin{aligned} &[\hat\varphi(\xi_1), \hat\varphi(\xi_2)]_{\mp} = [\hat\varphi^\dagger(\xi_1), \hat\varphi^\dagger(\xi_2)]_{\mp} = 0 \\ &[\hat\varphi(\xi_1), \hat\varphi^\dagger(\xi_2)]_{\mp} = \delta(\xi_1 - \xi_2) \\ &\hat\varphi(\xi)\,|0\rangle^{\pm} = 0 \quad \forall \xi \\ &{}^{\pm}\langle 0|\,\hat\varphi^\dagger(\xi) = 0 \quad \forall \xi \end{aligned}}$$

Strategie: Drücke Zustände mit Erzeugern angewandt auf $|0\rangle$ aus und verwende (Anti-) Kommutator-relationen, so daß alle Vernichter ganz nach rechts wandern und dann $|0\rangle$ annihilieren

Reihenfolge!

③

Beispiel

$$\hat{\varphi}(\xi)\,|\xi_1;\xi_2\rangle^{\pm} = \hat{\varphi}(\xi)\,\hat{\varphi}^{+}(\xi_1)\,\hat{\varphi}^{+}(\xi_2)\,|0\rangle$$

$$= \left\{\left[\hat{\varphi}(\xi);\hat{\varphi}^{+}(\xi_1)\right]_{\mp} \pm \hat{\varphi}^{+}(\xi_1)\,\hat{\varphi}(\xi)\right\}\hat{\varphi}^{+}(\xi_2)\,|0\rangle$$

$$= \left\{\delta(\xi-\xi_1)\,\hat{\varphi}^{+}(\xi_2) \pm \hat{\varphi}^{+}(\xi_1)\,\hat{\varphi}(\xi)\,\hat{\varphi}^{+}(\xi_2)\right\}|0\rangle$$

$$= \delta(\xi-\xi_1)\,|\xi_2\rangle \pm \hat{\varphi}^{+}(\xi_1)\left\{\left[\hat{\varphi}(\xi),\hat{\varphi}^{+}(\xi_2)\right]_{\mp} \pm \hat{\varphi}^{+}(\xi_2)\,\hat{\varphi}(\xi)\right\}|0\rangle$$

$$= \delta(\xi-\xi_1)\,|\xi_2\rangle \pm \delta(\xi-\xi_2)\,\hat{\varphi}^{+}(\xi_1)\,|0\rangle + \hat{\varphi}^{+}(\xi_1)\,\hat{\varphi}^{+}(\xi_2)\underbrace{\hat{\varphi}(\xi)\,|0\rangle}_{0}$$

$$= \delta(\xi-\xi_1)\,|\xi_2\rangle \pm \delta(\xi-\xi_2)\,|\xi_1\rangle$$

Allgemein

$$\hat{\varphi}(\xi)\,\underbrace{|\xi_1;\ldots;\xi_N\rangle^{\pm}}_{\in \mathcal{H}_N^{\pm}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{N}(\pm 1)^{k+1}\,\delta(\xi-\xi_k)\,|\xi_1;\ldots;\xi_{k-1};\xi_{k+1};\ldots;\xi_N\rangle^{\pm}}_{\in \mathcal{H}_{N-1}^{\pm}}$$

$\Rightarrow$ $\hat{\varphi}(\xi)$ vernichtet Teilchen mit Basisquantenzahl ξ aus Zustand (falls enthalten, andernfalls $\Rightarrow 0$!)

Observablen

Wir können Observablen mit Hilfe der Erzeuger und Vernichter ausdrücken.

(1) Operator für die Teilchendichte

$$\hat{\rho}(\xi) = \hat{\varphi}^+(\xi)\,\hat{\varphi}(\xi)$$

$\hat{\rho}(\xi)\,|0\rangle = 0$ ✓ (keine Teilchen im Vakuum)

Berechne Kommutator mit Erzeuger:

$$[\hat{\rho}(\xi), \hat{\varphi}^+(\xi')]_- = [\hat{\varphi}^+(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \hat{\varphi}^+(\xi')]_\mp$$

$$= \hat{\varphi}^+(\xi)[\hat{\varphi}(\xi), \hat{\varphi}^+(\xi')]_\mp \pm [\hat{\varphi}^+(\xi), \hat{\varphi}^+(\xi')]_\mp \hat{\varphi}(\xi)$$

$$= \hat{\varphi}^+(\xi)\,\delta(x-\xi')$$

Weiter gilt:

$$\hat{\rho}(\xi)\,|\xi_1;\xi_2;\cdots;\xi_N)^\pm = \hat{\rho}(\xi)\,\hat{\varphi}^+(\xi_1)\cdots\hat{\varphi}^+(\xi_N)\,|0\rangle$$

$$= [\hat{\rho}(\xi), \hat{\varphi}^+(\xi_1)\cdots\hat{\varphi}^+(\xi_N)]_-\,|0\rangle$$

$$= \Big\{[\hat{\rho}(\xi), \hat{\varphi}^+(\xi_1)]_-\,\hat{\varphi}^+(\xi_2)\cdots\hat{\varphi}^+(\xi_N) + \hat{\varphi}^+(\xi_1)\,[\hat{\rho}(\xi), \hat{\varphi}^+(\xi_2)\cdots\hat{\varphi}^+(\xi_N)]\Big\}\,|0\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \hat{\varphi}^+(\xi_1)\cdots\hat{\varphi}^+(\xi_{k-1})\,[\hat{\rho}(\xi), \hat{\varphi}^+(\xi_k)]\,\hat{\varphi}^+(\xi_{k+1})\cdots\hat{\varphi}^+(\xi_N)\,|0\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \delta(\xi-\xi_k)\,\hat{\varphi}^+(\xi_1)\cdots\hat{\varphi}^+(\xi_N)\,|0\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \delta(\xi-\xi_k)\,|\xi_1;\xi_2;\cdots;\xi_N)^\pm$$

(2) Operator für Gesamtteilchenzahl

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \sum_{\sigma=-1}^{1}}_{\int d\xi} \hat{\rho}(\xi)\, |\xi_1;\xi_2;\cdots;\xi_N)^{\pm} =$$

↑ zur Abkürzung

$$= \sum_{\sigma=-1}^{1} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\delta(\xi-\xi_k)}_{\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_k)\,\delta_{\sigma\sigma_k}}\, |\xi_1;\cdots;\xi_N)^{\pm}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \underbrace{\sum_{\sigma=-1}^{1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_k)}_{1}\, \delta_{\sigma\sigma_k}}_{1}}_{N}\, |\xi_1;\cdots;\xi_N)^{\pm}$$

$$= N\, |\xi_1;\cdots;\xi_N)$$

Einschub: Symmetrisieren – Antisymmetrisieren

Im $\mathcal{H}_N$ ist

$$|\xi_1\rangle \otimes |\xi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\xi_N\rangle$$

vollständige Basis. Die Projektion auf $\left\{\begin{array}{l}\text{bosonische}\\ \text{fermionische}\end{array}\right.$ Fockzustände erhält man durch Antisymmetrisieren

$$|\xi_1; \dots ; \xi_N)^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in S_N} (\pm 1)^{\sigma(P)} |\xi_{P(1)}\rangle \otimes \cdots \otimes |\xi_{P(N)}\rangle$$

$$:= \sqrt{N!}\, \hat{\mathcal{P}}_N^{\pm}$$

Es gilt

$$\left(\hat{\mathcal{P}}_N^{\pm}\right)^2 = \hat{\mathcal{P}}_N^{\pm} \quad \text{(im kompletten } \mathcal{H}_N \text{; auf } \mathcal{H}_N^{\pm} \text{ ist } (\mathcal{P}_N^{\pm})^2 = \mathbb{1}\text{!)}$$

Beweis

$$\left(\hat{\mathcal{P}}_N^{\pm}\right)^2 |\xi_1\rangle \otimes |\xi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\xi_N\rangle$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_{P \in S_N} (\pm 1)^{\sigma(P)} \frac{1}{N!} \sum_{P' \in S_N} (\pm 1)^{\sigma(P')} |\xi_{P(P'(1))}\rangle \otimes \cdots \otimes |\xi_{P(P'(N))}\rangle$$

Mit $P \in S_N$ fix durchläuft $P \circ P'$ alle Permutationen, wenn P' alle durchläuft und $(\pm 1)^{\sigma(P\circ P')} = (\pm 1)^{\sigma(P)+\sigma(P')}$

$$\overset{P'' = P\circ P'}{\Longrightarrow} \left(\mathcal{P}_N^{\pm}\right)^2 |\xi_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\xi_N\rangle = \frac{1}{N!} \sum_{P \in S_N} (\pm 1)^{\sigma(P)} \frac{1}{N!} \sum_{P''} (\pm 1)^{\sigma(P)+\sigma(P'')}$$

$$|\xi_{P''(1)}\rangle \otimes \cdots \otimes |\xi_{P''(N)}\rangle$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_{P \in S_N} \frac{1}{N!} \sum_{P'' \in S_N} (\pm 1)^{\sigma(P'')} |\xi_{P''(1)}\rangle \otimes \cdots \otimes |\xi_{P''(N)}\rangle$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_{P\in S_N} \underbrace{\hat{P}_N^{\pm}\,|\xi_1\rangle\otimes|\xi_2\rangle\otimes\cdots\otimes|\xi_N\rangle}_{\text{unabh. von } P}$$

$$= \hat{P}_N^{\pm}\,|\xi_1\rangle\otimes\cdots\otimes|\xi_N\rangle$$

Weiter ist

$$(\hat{P}_N^{\pm})^\dagger = \hat{P}_N^{\pm} \quad (\text{im kompletten } \mathcal{H}_N!)$$

Beweis:

$$\langle \hat{P}_N^{\pm}\,\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_N \,|\, \xi_1'\otimes\cdots\otimes\xi_N'\rangle =$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_{P\in S_N}(\pm 1)^{\sigma(P)}\langle \xi_{P(1)}\otimes\cdots\otimes\xi_{P(N)} \,|\, \xi_1'\otimes\cdots\otimes\xi_N'\rangle$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_{P\in S_N}(\pm 1)^{\sigma(P)}\,\delta(\xi_{P(1)}-\xi_1')\cdots\delta(\xi_{P(N)}-\xi_N')$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_{P\in S_N}(\pm 1)^{\sigma(P)}\,\delta(\xi_1-\xi'_{P(1)})\cdots\delta(\xi_N-\xi'_{P(N)})$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_{P\in S_N}(\pm 1)^{\sigma(P)}\langle \xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_N \,|\, \xi'_{P(1)}\otimes\cdots\otimes\xi'_{P(N)}\rangle$$

$$= \langle \xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_N \,|\, \hat{P}_N^{\pm}\,|\, \xi_1'\otimes\cdots\otimes\xi_N'\rangle$$

(3) "Einteilchenoperator"

$$\hat{A}_1^{(N)} = \sum_{k=1}^{N}\hat{A}_k \quad \text{mit} \quad \hat{A}_k = \underbrace{1\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1}_{(k-1)\text{-mal}}\otimes \underset{k\text{-te Stelle}}{\hat{A}}\otimes\underbrace{1\otimes\cdots\otimes 1}_{(N-k-1)\text{-mal}}$$

Eingeschränkt auf $\mathcal{H}_N^{\pm}$ ist

$$\hat{A}_1^{(N)\pm} = \frac{1}{(N!)^2}\int d\xi_1\cdots\int d\xi_N \int d\xi_1'\cdots d\xi_N'\; |\xi_1,\ldots,\xi_N\rangle^{\pm\,\pm}\langle\xi_1,\ldots,\xi_N|\hat{A}_1^{(N)}|\xi_1'\ldots\xi_N'\rangle^{\pm\,\pm}\langle\xi_1',\ldots,\xi_N'|$$

Vollständigkeitsrelation auf $\mathcal{H}_N^{\pm}$

$$\int d\xi_1 \cdots d\xi_N \, |\xi_1;\cdots;\xi_N)^{\pm\pm}(\xi_1;\cdots\xi_N|\xi_1';\cdots;\xi_N')$$

$$= \int d\xi_1 \cdots \int d\xi_N \, |\xi_1;\cdots;\xi_N)^{\pm} \sum_{P\in S_N} (\pm 1)^{\sigma(P)} \prod_{j=1}^{N} \delta(\xi_j - \xi'_{P(j)})$$

$$= \sum_{P\in S_N} (\pm 1)^{\sigma(P)} \int d\xi_1 \cdots \int d\xi_N \, |\xi'_{P(1)} \cdots \xi'_{P(N)})^{\pm}$$

$$= N! \, |\xi_1';\cdots;\xi_N')$$

$$\Rightarrow \mathbb{1}_N^{\pm} = \frac{1}{N!} \int d\xi_1 \cdots d\xi_N \, |\xi_1;\cdots;\xi_N)^{\pm\pm}(\xi_1;\cdots;\xi_N|$$

↑ Beachte Normierungsfaktor

Im Fockraum ist

$$\mathbb{1}^{\pm}_{Fock} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathbb{1}_N^{\pm}$$

$$
{}^{\pm}\langle \xi_1;\cdots;\xi_N|\hat{A}_1^{(N)}|\xi_1'\cdots\xi_N'\rangle^{\pm}
$$

$$
= \langle \xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_N|\hat{S}_N^{\pm}\hat{A}_1^{(N)}\hat{S}_N^{\pm}|\xi_1'\otimes\cdots\otimes\xi_N'\rangle N!
$$

$$
= \langle \xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_N|\hat{A}_1^{(N)}\hat{S}_N^{\pm}|\xi_1'\otimes\cdots\otimes\xi_N'\rangle N!
$$

$$
= \sum_{P\in S_N}(\pm 1)^{\sigma(P)}\langle \xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_N|\hat{A}_1^{(N)}|\xi_{P(1)}'\otimes\cdots\otimes\xi_{P(N)}'\rangle
$$

$$
= \sum_{P\in S_N}(\pm 1)^{\sigma(P)}\sum_{k=1}^{N}\langle \xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_N|\hat{A}_k|\xi_{P(1)}'\otimes\cdots\otimes\xi_{P(N)}'\rangle
$$

$$
= \sum_{P\in S_N}(\pm 1)^{\sigma(P)}\sum_{k=1}^{N}\delta(\xi_1-\xi_{P(1)}')\cdots\delta(\xi_{k-1}-\xi_{P(k-1)}')
$$

$$
\underbrace{\langle \xi_k|\hat{A}|\xi_{P(k)}'\rangle}_{A[\xi_k;\xi_{P(k)}']}\delta(\xi_{k+1}-\xi_{P(k+1)}')\cdots\delta(\xi_N-\xi_{P(N)}')
$$

$\leftarrow$ Matrixelement in 1-Teilchen orts-Spin Darstellung!

$$
\Rightarrow \hat{A}_1^{(N)\pm} = \left(\frac{1}{N!}\right)^2\int d\xi_1\cdots\int d\xi_N\int d\xi_1'\cdots\int d\xi_N'
$$

$$
|\xi_1;\cdots;\xi_N\rangle^{\pm}\,{}^{\pm}\langle\xi_1';\cdots;\xi_N'|
$$

$$
\sum_{P\in S_N}(\pm 1)^{\sigma(P)}\sum_{k=1}^{N}\delta(\xi_1-\xi_{P(1)}')\cdots\delta(\xi_{k-1}-\xi_{P(k-1)}')\,A[\xi_k;\xi_{P(k)}']
$$

$$
\delta(\xi_{k+1}-\xi_{P(k+1)}')\cdots\delta(\xi_N-\xi_{P(N)}')
$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1^{(N)\pm} = \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \sum_{P\in S_N} (\pm 1)^{\sigma(P)} \sum_{k=1}^{N} \int d\xi_k \int d\xi_1' \cdots \int d\xi_N' \, A(\xi_k; \xi_{P(k)}')$$ ⑨

$$|\xi_{P(1)}'; \cdots; \xi_{P(k-1)}'; \xi_k; \xi_{P(k+1)}'; \cdots; \xi_{P(N)}'\rangle^{\pm\pm}\langle \xi_1'; \cdots; \xi_N'|$$

$$= \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \sum_{P\in S_N} (+1) \sum_{k=1}^{N} \int d\xi_k \int d\xi_1' \cdots d\xi_N' \, A(\xi_k; \xi_{P(k)}')$$

$$(\pm 1)^{k-1} |\xi_k; \xi_{P(1)}'; \cdots; \xi_{P(k-1)}'; \xi_{P(k+1)}'; \cdots; \xi_{P(N)}'\rangle^{\pm}$$

$$(\pm 1)^{k-1} {}^{\pm}\langle \xi_{P(k)}'; \xi_{P(1)}'; \cdots; \xi_{P(k-1)}'; \xi_{P(k+1)}'; \cdots; \xi_{P(N)}'|$$

Benenne nun um

$$\xi_k = \xi; \; \xi_{P(k)}' = \xi''; \; \xi_{P(1)}' = \xi_1''; \cdots$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1^{(N)\pm} = \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \sum_{P\in S_N} \sum_{k=1}^{N} \int d\xi \int d\xi'' \, A(\xi, \xi'') \cdot$$

$$\cdot |\xi; \xi_1''; \cdots; \xi_{N-1}''\rangle^{\pm\pm}\langle \xi''; \xi_1''; \cdots; \xi_{N-1}''|$$

$$= \frac{1}{N!} N \int d\xi \int d\xi'' \, A(\xi, \xi'') \, \hat{\varphi}^+(\xi) \int d\xi_1'' \cdots \int d\xi_{N-1}''$$

$$|\xi_1''; \cdots; \xi_{N-1}''\rangle^{\pm\pm}\langle \xi_1''; \cdots; \xi_{N-1}''| \, \hat{\varphi}(\xi'')$$

$$= \int d\xi \int d\xi'' \, A(\xi, \xi'') \, \varphi^+(\xi) \underbrace{\frac{1}{(N-1)!} \int d\xi_1'' \cdots \int d\xi_{N-1}'' \cdot |\xi_1''; \cdots; \xi_{N-1}''\rangle^{\pm\pm}\langle \xi_1''; \cdots; \xi_{N-1}''|}_{\mathbb{1}^{(N-1)}} \cdot \hat{\varphi}(\xi'')$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1^{\pm} = \sum_{N=1}^{\infty} \hat{A}_1^{(N)\pm} = \int d\xi \int d\xi'' \, A(\xi, \xi'') \, \hat{\varphi}^+(\xi) \, \hat{\varphi}(\xi'')$$