

Übungen zur Höheren Quantenmechanik

Blatt 1 (Zusatzaufgabe)

Der Physik-Nobelpreis 2008 — ein Analogon aus der linearen Algebra
(nur für Interessierte)

Betrachtet wird die Größe

$$L = \langle u | \mathcal{U} | d \rangle + \langle d | \mathcal{U}^\dagger | u \rangle + \langle u | \mathcal{M}_u | u \rangle + \langle d | \mathcal{M}_d | d \rangle. \quad (1)$$

Dabei sind

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix} \quad (2)$$

zwei N -komponentige Vektoren mit $u_j, d_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, N$. $\mathcal{M}_{u,d}$ sind reelle $N \times N$ -Diagonalmatrizen, \mathcal{U} ist eine unitäre $N \times N$ -Matrix.

Problemstellung: Findet man zu einem vorgegebenen \mathcal{U} stets $2N$ reelle Zahlen α_j, β_j , $j = 1, \dots, N$, so daß die Transformation

$$u_j \rightarrow e^{i\alpha_j} u_j^*, \quad d_j \rightarrow e^{i\beta_j} d_j^* \quad (3)$$

die Größe L unverändert läßt?

Hinweis: Zeigen sie, daß die Antwort von N abhängt, indem Sie zeigen, daß die Antwort „ja“ ist für $N = 1, 2$, aber „nein“ für $N = 3$.¹

Anleitung:

- Zeigen Sie zuerst, daß die Terme mit $\mathcal{M}_{u,d}$ aus Gleichung (1) invariant sind bezüglich der Transformation (3).
- Zeigen Sie, daß L aus Gleichung (1) invariant ist unter der Transformation (3), wenn gilt

$$\mathcal{U} D_\beta = D_\alpha (\mathcal{U}^\dagger)^T. \quad (4)$$

Dabei ist D_α eine Diagonalmatrix mit Einträgen

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 & \dots \\ \vdots & & \dots & \\ & & & e^{i\alpha_N} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Entsprechendes gilt für D_β .

¹Die Antwort ist übrigens auch „nein“ für $N > 3$.

- Betrachten Sie nun nacheinander die Fälle $N = 1$ und $N = 2$ und zeigen Sie, daß man immer $\alpha_j, \beta_j, j = 1, \dots, N$, finden kann, so daß die Bedingung (4) erfüllt ist.
- Um zu zeigen, daß L nicht invariant bleibt für $N = 3$, genügt es, ein \mathcal{U} anzugeben, für das man keine α_j, β_j finden kann, so daß (4) erfüllt wäre. Zeigen Sie, daß das für den Fall

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} e^{i\delta} & \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} e^{i\delta} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} e^{i\delta} & \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (6)$$

mit $\delta \notin \{0, \pi\}$ tatsächlich zutrifft. Zeigen Sie zuerst, daß \mathcal{U} wirklich unitär ist.

Bezug zum Physik-Nobelpreis

Die Komponenten von $|u\rangle$ und $|d\rangle$ entsprechen den einzelnen Quarksorten („Quark-Flavors“) im Standardmodell der Elementarteilchen, für den physikalischen Fall $N = 3$ also up, charm und top bzw. down, strange und bottom Quarks, die jeweils eine elektrische Ladung von $+2/3|e|$ und $-1/3|e|$ tragen, wobei e die Ladung eines Elektrons bezeichnet. Die Größe L beschreibt schematisch einen Teil des Hamiltonoperators der schwachen Wechselwirkung der Quarks. Wenn L unter einer Transformation unverändert bleibt, so liegt eine Symmetrie vor. Gl. 3 entspricht der sog. CP-Transformation. Physikalisch bedeutet eine CP-Transformation, daß man sich in irgendeiner Reaktion von Quarks jedes Quark durch sein Antiquark („Ladungskonjugation“) ersetzt denkt und den Vorgang zugleich in einem Spiegel betrachtet (Raumspiegelung). Wäre der Hamiltonoperator invariant unter solchen CP-Transformationen, würde der ladungskonjugierte und raumgespiegelte Prozeß ebenfalls einem in der Natur möglichen Vorgang entsprechen.

Experimentell hat sich 1964 gezeigt, daß die CP-Symmetrie verletzt ist. Mit den damals bekannten Quarksorten ließ sich die Theorie nicht so formulieren, daß sich eine CP-Verletzung ergab. Man kannte damals nur drei Sorten von Quarks (up, down und strange) und vermutete die Existenz einer vierten. Das entspricht in unserem Beispiel dem Fall $N = 2$. Wie wir in der Übung zeigen, kann man keine unitäre Matrix \mathcal{U} finden, so daß sich L unter der CP-Transformation 3 verändert. Der Hamiltonoperator unserer schematischen Theorie der schwachen Wechselwirkung ist also in diesem Fall stets CP-invariant. Zwei der diesjährigen Nobelpreisträger, Kobayashi und Maskawa, postulierten daher die Existenz zweier neuer Quarksorten (top und bottom). In unserem Beispiel entspricht das $N = 3$.

Wer sich für mehr Details zum Physiknobelpreis 2008 interessiert, kann auf der Nobelpreis-Webseite sehr gutes Informationsmaterial herunterladen. Dort werden später auch die Nobelpreisträgervorträge sowohl als Video als auch als Text bereitgestellt:

http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2008/

Wenn Sie diese Aufgabe als schwer empfinden, dann bedenken Sie bitte, daß es den Nobelpreis nicht geschenkt gibt.