

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 3

Aufgabe 1: Integration durch Substitution

Berechnen Sie die folgenden Integrale durch geeignete Anwendung der Substitutionsregel:

(a) $\int dx(2x - 1)\exp(x^2 - x)$

Lösung: Substituieren wir $u = x^2 - x$, folgt $du = dx(2x - 1)$ und damit

$$\int dx(2x - 1)\exp(x^2 - x) = \int du \exp u = \exp u + C = \exp(x^2 - x) + C. \quad (1)$$

(b) $\int dx \ln x/x$

Lösung: Substituieren wir $u = \ln x$, folgt $du = dx/x$ und damit

$$\int dx \ln x/x = \int du u = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C. \quad (2)$$

(c) $\int dx 1/\sqrt{x^2 + 1}$, **Tip:** Substituieren Sie $x = \sinh u$

Lösung: Es gilt $dx = du \cosh u$ und damit

$$\int dx 1/\sqrt{x^2 + 1} = \int du \cosh u \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 u + 1}} = \int du = u + C = \operatorname{arsinh} x + C. \quad (3)$$

(d) $\int dx \tan x$

Lösung: Wegen $\tan x = \sin x/\cos x$ empfiehlt sich offenbar die Substitution $u = \cos x$ und damit $du = -dx \sin x$. Damit folgt

$$\int dx \tan x = \int dx \frac{\sin x}{\cos x} = - \int du \frac{1}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C. \quad (4)$$

(e) Die obere Halbellipse mit Hauptachsen $a > 0$ und $b > 0$ ist durch

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (5)$$

mit $x \in [-a, a]$ gegeben. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse.

Tip: Substituieren Sie $x = a \cos \varphi$.

Lösung: Der Flächeninhalt ist offenbar das Doppelte des Flächeninhalts der durch (5) beschriebenen Halbellipse, d.h.

$$A = 2b \int_{-a}^a dx \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (6)$$

Substituieren wir $x = a \cos \varphi$, ist $dx = -d\varphi a \sin \varphi$ und das Intervall $x \in [-a, a]$ wird umkehrbar eindeutig auf das Intervall $\varphi \in [0, \pi]$ abgebildet, d.h.

$$A = -2ab \int_{\pi}^0 d\varphi \sin \varphi \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = +2ab \int_0^{\pi} d\varphi \sin^2 \varphi. \quad (7)$$

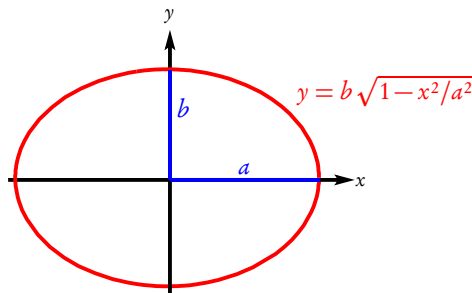
Dabei haben wir im zweiten Schritt die Integrationsgrenzen vertauscht, was den Faktor (-1) kompensiert und benutzt, dass wegen $1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi$ und $\sin \varphi \geq 0$ für $\varphi \in [0, \pi]$ die positive Wurzel korrekt ist, d.h. $\sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = +\sin \varphi$.

Das Integral berechnen wir mit Hilfe der Doppelwinkelformel für den cos:

$$\cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 1 - 2\sin^2 \varphi \Rightarrow \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\varphi)] \quad (8)$$

und damit

$$A = ab \int_0^\pi d\varphi [1 - \cos(2\varphi)] = ab \left[\varphi - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \pi ab. \quad (9)$$



Aufgabe 2: Integration durch partielle Integration

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der partiellen Integration

Lösung: Die Formel für die partielle Integration lautet

$$\int dx u'(x)v(x) = u(x)v(x) - \int dx u(x)v'(x). \quad (10)$$

(a) $\int dx x \sin x$

Lösung: Offenbar ist es hier am einfachsten, $u'(x) = \sin x$ und $v(x) = x$ zu setzen, denn dann ist $u(x) = -\cos x$ und $v'(x) = 1$. Mit (10) folgt dann

$$\int dx x \sin x = -x \cos x - \int dx (-\cos x) = -x \cos x + \int \cos x = \sin x - x \cos x + C. \quad (11)$$

(b) $\int dx x \exp x$

Lösung: Mit $u'(x) = \exp x$ und $v(x) = x$ folgt $u = \exp x$ und $v'(x) = 1$ und damit

$$\int dx x \exp x = x \exp x - \int dx \exp x = (x - 1) \exp x + C. \quad (12)$$

(c) $\int dx x^n \ln x$ mit $n \in \mathbb{N}$

Lösung: Hier setzen wir $u'(x) = x^n$ und $v(x) = \ln x$. Damit wird $u(x) = x^{n+1}/(n+1)$ und $v'(x) = 1/x$, d.h.

$$\begin{aligned} \int dx x^n \ln x &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \int dx \frac{1}{n+1} x^n \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} [(n+1) \ln x - 1] + C. \end{aligned} \quad (13)$$

(d) $\int dx \ln x$, **Tip:** Schreiben Sie den Integranden als $1 \cdot \ln x$ und wenden Sie die offensichtlich einfachste Wahl für u' und v bei der partiellen Integration an.

Lösung: Wir setzen $u'(x) = 1$ und $v(x) = \ln x$. Damit wird $u(x) = x$ und $v'(x) = 1/x$. Folglich ist

$$\int dx \ln x = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C. \quad (14)$$

Wir hätten auch einfach in (13) $n = 0$ setzen können.

(e) $\int dx \sin x \exp x$

Lösung: Hier setzen wir $u'(x) = \exp x$ und $v(x) = \sin x$, d.h. $u(x) = \exp x$ und $v'(x) = \cos x$. Dann wird

$$\int dx \sin x \exp x = \exp x \sin x - \int dx \exp x \cos x. \quad (15)$$

Im verbliebenen Integral wenden wir nochmals die partielle Integration an mit $u'(x) = \exp x$, $v(x) = \cos x$. Dann ist $u(x) = \exp x$ und $v'(x) = -\sin x$, d.h.

$$\int dx \exp x \cos x = \exp x \cos x + \int dx \exp x \sin x \quad (16)$$

Setzen wir dies in (15) ein, folgt

$$\int dx \sin x \exp x = \exp x(\sin x - \cos x) - \int dx \sin x \exp x. \quad (17)$$

Addieren wir hier das Integral und dividieren durch 2, folgt

$$\int dx \sin x \exp x = \frac{1}{2} \exp x(\sin x - \cos x). \quad (18)$$