H. van Hees **Wintersemester 2022/2023**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 3

Aufgabe 1 (10 Punkte): Satellit auf Kreisbahn

Wie lautet das effektive Potenzial V_{eff} für die Bahn eines Erdsatelliten mit der Masse m? Dabei darf von der Näherung Gebrauch gemacht werden, dass die Erde als festes Zentrum behandelt werden darf, d.h. $m \ll m_{\text{Erde}}$.

Gehen Sie vom Energieerhaltungssatz

$$E = m\dot{r}^2/2 + V_{\text{eff}}(r) \tag{1}$$

mit diesem Potential aus. Bestimmen Sie den Radius r_0 der Kreisbahn als Funktion der Umlauffrequenz ω des Satelliten. Welcher Radius ergibt sich für eine geostationäre Bahn, d.h. eine Bahn, für die der Satellit stets über demselben Punkt der Erde steht?

Die Gravitationskonstante ist $\gamma = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ und die Erdmasse $m_{\text{Erde}} = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg.

Hinweis: Es ist dabei hilfreich, dass man durch Ableiten von (1) nach der Zeit die effektive Bewegungsgleichung für r

$$m\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V_{\text{eff}}(r) \tag{2}$$

erhält (*warum?*).

Hinweis: Alle Resultate der Vorlesung (Skript Abschnitt 2.8) dürfen ohne Beweis verwendet werden!

Aufgabe 2 (10 Punkte): Bewegung im allgemeinen Zentralkraftfeld

Wir betrachten allgemein die Bewegung eines Teilchens im Zentralkraftfeld, wobei die Kraft

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} V(r), \quad r = |\vec{x}|$$

gegeben ist.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{e}_r \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = F_r \vec{e}_r, \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{r}$$

gilt.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass aus der Newtonschen Bewegungsgleichung die Erhaltung der Gesamtenergie des Teilchens

$$E = T + V = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + V(r)$$

und des Gesamtdrehimpulses

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$$

folgen.

(c) (2 Punkte) Drücken Sie $|\vec{L}|$ durch die Polarkoordinaten (r, φ) und deren Zeitableitungen $\dot{r}$ und $\dot{\varphi}$ aus, wobei die Polarkoordinaten durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

definiert sind.

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie unter Verwendung von Energie- und Drehimpulserhaltung Bewegungsgleichungen für r und φ. Zeigen Sie, dass die Bewegung für r durch eine eindimensionale Bewegung eines Teilchens in einem „effektiven Potential" (welchem?) beschrieben wird.

(e) (2 Punkte) Geben Sie ein Kriterium dafür an, dass für vorgegebene Energie E und Drehimpuls $L = |\vec{L}|$ eine Kreisbahn $r = R = \text{const}$ als Lösung existiert.

(f) **Zusatzaufgabe zum Knobeln (3 Zusatzpunkte):** Diskutieren Sie, ob diese Kreisbahn stabil gegen kleine Störungen ist. Setzen Sie dazu $r = R + \eta$ und Entwickeln Sie die Bewegungsgleichung für r bis zur linearen Ordnung nach η und diskutieren Sie die entstehende näherungsweise Bewegungsgleichung für η.