Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 5

Aufgabe 1: Kondensatoren

In der Vorlesung haben wir die Berechnung der Kapazität eines Kugelkondensators besprochen. Berechnen Sie nun analog (näherungsweise) die Kapazitäten eines

(a) ebenen Plattenkondensators: Zwei große ebene Metallplatten der Fläche A liegen parallel im Abstand d und sind an eine Batterie der Spannung U angeschlossen. Berechnen Sie das elektrische Feld zwischen den Platten, sein Potential sowie die Oberflächenladung auf den Platten und ermitteln Sie daraus die Kapazität.

Nehmen Sie dazu an, dass die Platten so groß seien, dass man Randeffekte vernachlässigen kann und nutzen Sie die entsprechenden Symmetrien für den Limes unendlich großer Halbebenen.

(b) Zylinderkondensators: Innen sei ein Draht mit Radius a_1 und außen eine dazu parallele Zylinderfläche mit Radius $a_2 > a_1$. Die Länge sei L und sehr groß gegenüber $a_2 - a_1$. Berechnen Sie das elektrische Feld zwischen den Leitern, sein Potential sowie die Oberflächenladung auf den Platten und ermitteln Sie daraus die Kapazität.

(c) Zeigen Sie für die oben angegebenen Kondensatoren, dass die gesamte Feldenergie eines geladenen Kondensators $W = CU^2/2$ ist.

Aufgabe 2: Multipolentwicklung für das elektrostatische Potential

Vorgegeben sei eine beliebige Ladungsverteilung, die auf einen endlichen Raumbereich V beschränkt ist, d.h. es sei

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0(\vec{r}) & \text{für} \quad \vec{r} \in V, \\ 0 & \text{für} \quad \vec{r} \notin V. \end{cases} \tag{1}$$

Wir nehmen an, dass $V \subset K_a$ ist, wobei K_a die Kugel mit Radius a um den Ursprung des kartesischen Koordinatensystems ist. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass dann das Potential des elektrostatischen Feldes allgemein durch

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{2}$$

gegeben ist. Gesucht ist eine Reihenentwicklung nach negativen Potenzen $r^{-(\ell+1)}$ ($\ell \in \{0, 1, 2 \ldots\}$) für $r \gg a$, die sog. Multipolentwicklung

(a) Wir schreiben

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \frac{1}{|(\vec{r} - \vec{r}')/r|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi(\vec{r}, \vec{r}')}}. \tag{3}$$

Bestimmen Sie die Funktion $\xi(\vec{r}, \vec{r}')$.

Hinweis: Verwenden Sie $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}$

(b) Zeigen Sie, dass die ersten Terme der Taylorentwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \xi}} = 1 + \frac{\xi}{2} + \frac{3\xi^2}{8} + \mathcal{O}(\xi^3) \tag{4}$$

lauten.

(c) Verwenden Sie das Resultat, um die Multipolentwicklung bis zur Ordnung $1/r^3$ zu bestimmen. Die entsprechenden drei Terme heißen Monopolterm ($\ell = 0$), Dipolterm ($\ell = 1$) und Quadrupolterm ($\ell = 2$). Berechnen Sie die Koeffizienten der Reihenentwicklung als Volumenintegrale über die Ladungsverteilung, also die sog. **Multipolmomente** der Ladungsverteilung.

(d) Berechnen Sie schließlich über

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\operatorname{grad}\Phi \tag{5}$$

die Multipolentwicklung des elektrostatischen Feldes.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`https://th.physik.uni-frankfurt.de/~hees/theo2-l3-SS19/index.html`