H. van Hees **Sommersemester 2021**

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 9

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Review zur Vektoranalysis
Fassen Sie kurz die grundlegende Mathematik der Vektoranalysis zusammen.

- die Operationen grad, div, rot und der Operator $\vec{\nabla}$ in kartesischen Koordinaten
- Weg-, Flächen- und Volumenintegrale
- Koordinatenunabhängige Definitionen von div und rot mittels Flächen- bzw. Wegintegralen
- Gaußscher und Stokesscher Integralsatz
- Existenz eines skalaren Potentials für wirbelfreie Vektorfelder
- Existenz eines Vektorpotentials für quellenfreie Vektorfelder; Eichinvarianz
- Helmholtzscher Zerlegungssatz (Fundamentalsatz der Vektoranalysis)

Das Skript und Lehrbücher dürfen selbstverständlich verwendet werden!

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Birkhoff-Theorem für die Elektrodynamik
Wir wollen beweisen, dass die einzige radialsymmetrische Lösung der freien Maxwell-Gleichungen (also keine Ladungen, $\rho = 0$, und keine Ströme $\vec{j} = 0$ außerhalb eines begrenzten Raumbereichs) das elektrostatische Coulomb-Feld ist.
Dabei nehmen wir an, für eine Kugel vom Radius $R > 0$ um den Koordinatenursprung $\rho = 0$ und $\vec{j} = \vec{0}$ ist, während im Inneren der Kugel beliebige Ladungs- und Stromverteilungen vorliegen mögen.
Hierbei bedeutet Radialsymmetrie bzgl. des Ursprungs unseres kartesischen Koordinatensystems im Bereich $r > R$, dass

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = f(t,r)\vec{r}, \quad \vec{B}(t,\vec{r}) = g(t,r)\vec{r} \quad \text{mit} \quad r = |\vec{r}| \tag{1}$$

ist. Verwenden Sie nun die Maxwell-Gleichungen mit $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = \vec{0}, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j}, \tag{4}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{5}$$

um Differentialgleichungen für f und g aufzustellen **[5 Punkte]** und zeigen Sie, dass im ladungs- und stromfreien Bereich $r > R$ die einzige Lösung, für die $\vec{E} \to \vec{0}$ und $\vec{B} \to \vec{0}$ für $r \to \infty$

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r}, \quad \vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{0}, \tag{6}$$

also das elektrostatische Coulomb-Feld einer Punktladung Q im Koordinatenursprung ist **[5 Punkte]**.
Dabei ist Q die gesamte in der Kugel $r < R$ enhaltene Ladung.