H. van Hees **Sommersemester 2023**

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 10

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Magnetisches Moment einer stationären Stromdichte

Wir betrachten eine beliebige stationäre Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$, für die $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ gelten muss (Ladungserhaltung für zeitunabhängige Felder und Quellen). Sie sei weiter auf eine Kugel mit Radius a um den Ursprung begrenzt, d.h. es sei $\vec{j}(\vec{r}) = 0$ für $r = |\vec{r}| \geq a$. Aus den Gleichungen für das statische Magnetfeld

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \tag{2}$$

folgt wegen (1), dass es ein Vektorpotential $\vec{A}$ gibt, so dass $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und für das wir die „Eichfreiheit“ verwenden können, um die Nebenbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ zu fordern („Coulomb-Eichung“). Für die zweite Gleichung ergibt sich dann

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \tag{3}$$

Mit der Green-Funktion für den Laplace-Operator folgt daraus

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}. \tag{4}$$

Dabei ist K_a die Kugel mit Radius a mit Mittelpunkt im Ursprung. Man kann nun für $r = |\vec{r}| \gg a$ die Taylor-Entwicklung von $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ bzgl. $\vec{r}'$ verwenden und mit der linearen Ordnung abbrechen:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} - (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} + \mathcal{O}(r'^2) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \cdots \tag{5}$$

Damit folgt schließlich

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \int_{K_a} \frac{\mu_0 \vec{j}(r')}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} \right). \tag{6}$$

Mit den folgenden Aufgaben werten wir die beiden Integrale genauer aus. Dazu nutzen wir zunächst $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ aus und verwenden den Gaußschen Integralsatz

$$\int_{K_a} \mathrm{d}^3 \vec{r} \vec{\nabla} \cdot [F(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r})] = \int_{\partial K_a} \mathrm{d}^2 \vec{r} \cdot F(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r}) = 0 \tag{7}$$

an. Dabei ist F ein beliebiges Skalarfeld.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass daraus

$$\int_{K_a} \mathrm{d}^3 r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} F = 0 \tag{8}$$

folgt.

(b) (2 Punkte) Wenden Sie (8) für $F(\vec{r})=r_j$ ($j \in \{1,2,3\}$) an, wobei r_j die j-te kartesische Komponente von $\vec{r}$ ist, und argumentieren Sie daraus, dass

$$\int_{\mathbb{K}_a} \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}\,') = 0 \tag{9}$$

folgt.

(c) (2 Punkte) Wenden Sie nun (8) für $F(\vec{r}) = r_j r_k$ an, um zu zeigen, dass

$$\int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' r'_j j_k(\vec{r}\,') = -\int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' r'_k j_j(\vec{r}\,') \tag{10}$$

ist.

(d) (3 Punkte) Mit (9) und (10) folgt dann aus (6)

$$A_j(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r' j_j(\vec{r}\,') r'_k r_k = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r' [j_j(\vec{r}\,') r'_k - j_k(\vec{r}\,') r'_j] r_k. \tag{11}$$

Zeigen Sie, dass man diese Formel als

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \tag{12}$$

mit dem **magnetischen Dipolmoment** der Stromdichte $\vec{j}$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' [\vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')]. \tag{13}$$

(e) (3 Punkte) Zeigen Sie schließlich, dass (12) zu einem Dipolfeld für $\vec{B}$ führt, d.h.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - \vec{m} r^2]. \tag{14}$$