H. van Hees **Wintersemester 2018/2019**

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 3

Aufgabe 1: Gaußßche Wellenpakete

Wir betrachten ein freies Teilchen, das sich in einer Raumrichtung (Ortskoordinate x) mit dem Hamilton-Operator

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2. \tag{1}$$

Zur Anfangszeit $t = 0$ sei das Teilchen in einem Zustand präpariert, der durch die Ortswellenfunktion

$$\psi(0, x) = \psi_0(x) = N \exp\left(-\frac{x^2}{4\Delta x^2} + \frac{i}{\hbar} x p_0\right) \tag{2}$$

präpariert ist („Gaußsches Wellenpaket“).

(a) Berechnen Sie die Normierungskonstante, sodass die Wellenfunktion ordnungsgemäß auf 1 normiert ist, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x |\psi_0(x)|^2 = 1. \tag{3}$$

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Standardabweichungen von x und p.

(c) Berechnen Sie die Impulswellenfunktion $\tilde{\psi}_0(p)$.

(d) Die Zeitentwicklung des Zustandskets ist durch

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} t \mathbf{H}\right) |\psi_0\rangle \tag{4}$$

gegeben. Zeigen Sie damit und (1), dass für die Impulswellenfunktion

$$\tilde{\psi}(t, p) = \langle p \,|\, \psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{\mathrm{i} p^2}{2m\hbar} t\right) \tilde{\psi}_0(p) \tag{5}$$

gilt.

Hinweis: Die Resultate der Aufgabe 2 auf dem vorigen Übungsblatt sind bei den diversen Integralen sehr nützlich. Mit den dort verwendeten Rechentricks kann man leicht die verallgemeinerten Gauß-Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \exp(-Ax^2 + Bx) = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(\frac{B^2}{4A}\right), \tag{6}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, x \exp(-Ax^2 + Bx) = \frac{B\sqrt{\pi}}{2A^{3/2}} \exp\left(\frac{B^2}{4A}\right), \tag{7}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, x^2 \exp(-Ax^2 + Bx) = \frac{(2A + B^2)\sqrt{\pi}}{4A^{5/2}} \exp\left(\frac{B^2}{4A}\right), \tag{8}$$

herleiten, das Sie hier für alle in dieser Aufgabe benötigten Integrale verwenden können. Damit das Integral konvergiert, muss nur $\mathrm{Re} A > 0$ gelten; $B \in \mathbb{C}$ ist beliebig.