Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 3

Aufgabe 1 (10 Punkte): Operatorgymnastik

Im Folgenden seien $\hat{A}, \hat{B}, \ldots$ irgendwelche (nicht notwendig selbstadjungierte Operatoren. Die Definition des zu $\hat{A}$ adjungierten Operators $\hat{A}^{\dagger}$ ist, dass für alle Vektoren $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ stets

$$\left\langle \psi \middle| \hat{A} \middle| \phi \right\rangle = \left\langle \hat{A}^{\dagger} \psi \middle| \phi \right\rangle \tag{1}$$

gilt.

Weiterhin ist für zwei Operatoren der Kommutator durch

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{2}$$

definiert. Zeigen Sie folgende Identitäten

(a) (2 Punkte) $(\hat{A}\hat{B})^{\dagger} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}$.

(b) (2 Pnkte) $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]^{\dagger} = -\left[\hat{A}^{\dagger}, \hat{B}^{\dagger}\right]$.

(c) (3 Punkte) $\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C}$.

(d) (3 Punkte) $\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Orts- und Impulsoperatoralgebra

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass in der Ortsdarstellung

$$\hat{\vec{x}}\psi(\vec{x}) = \vec{x}\psi(\vec{x}), \quad \hat{\vec{p}}\psi(\vec{x}) = -\mathrm{i}\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{x}) \tag{3}$$

gilt.

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die sog. Heisenberg-Algebra gilt, also die folgenden Kommutatorrelationen für die Operatoren der Orts- und Impulskomponenten:

$$\left[\hat{x}_j, \hat{x}_k\right] = 0, \quad \left[\hat{p}_j, \hat{p}_k\right] = 0, \quad \left[\hat{x}_j, \hat{p}_k\right] = \mathrm{i}\hbar\delta_{jk}\mathbb{1}. \tag{4}$$

(b) (2 Punkte) Wie in der klassischen Mechanik definieren wir den Operator für den (Bahn-) Drehimpuls durch

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}} \quad \text{bzw.} \quad \hat{L}_j = \epsilon_{jkl}\hat{x}_k\hat{p}_l. \tag{5}$$

Dabei verwenden wir die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. es wird über gleichnamige Indizes (hier also über k und l) von 1 bis 3 summiert.

Diskutieren Sie, ob dabei Probleme mit der Reihenfolge der Operatoren infolge der Nichtkommutativität der Orts- und Impulsoperatoren auftreten und zeigen Sie, dass die Drehimpulsoperatoren $\hat{L}_j$ selbstadjungiert sind.

(c) (3 Punkte) Zeigen Sie unter Zuhilfenahme der bei Aufgabe 1 bewiesenen Formeln (c) und (d), dass die Drehimpulse die Kommutatoralgebra

$$\left[\hat{L}_j, \hat{L}_k\right] = \mathrm{i}\epsilon_{jkl}\hat{L}_l \tag{6}$$

erfüllen.

Tip: Dabei ist die Formel $\epsilon_{abc}\epsilon_{ade} = \delta_{bd}\delta_{ce} - \delta_{be}\delta_{cd}$ nützlich.