

## Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 3

### Aufgabe 1 (10 Punkte): Potentialtopf

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Teilchens auf der  $x$ -Achse in einem Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, a], \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1)$$

Damit ist die Bewegung des Teilchens auf das Intervall  $x \in [0, a]$  beschränkt, und die Wellenfunktionen müssen die Randbedingungen

$$\psi(a) = \psi(0) = 0 \quad (2)$$

erfüllen. Der Hamilton-Operator ist innerhalb des Topfes der eines freien Teilchens

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2. \quad (3)$$

**Bemerkung:** In den Übungen bezeichnen wir Operatoren mit einem „Dach“ über dem Symbol (also hier den Hamilton-Operator mit  $\hat{H}$  statt mit  $H$ ), weil sich das beim Rechnen besser notieren lässt als fettgedruckte Symbole wie im Manuskript.

- (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass  $\hat{H}$  auf dem Hilbert-Raum der über das Intervall  $[0, a]$  quadratintegriblen Funktionen  $L^2([0, a])$  selbstadjungiert ist.

**Hinweis:** Sie müssen zeigen, dass für zwei beliebige Wellenfunktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  stets  $\langle \psi_1 | \hat{H} \psi_2 \rangle = \langle \hat{H} \psi_1 | \psi_2 \rangle$  gilt, wobei das Skalarprodukt zwischen zwei Wellenfunktionen durch

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_0^a dx \psi_1^*(x) \psi_2(x) \quad (4)$$

definiert ist.

- (b) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle Energie-Eigenzustände und die dazugehörigen Energie-Eigenwerte aus der entsprechenden Eigenwertgleichung

$$\hat{H} u_E(x) = E u_E(x). \quad (5)$$

- (c) (3 Punkte) Normieren Sie die Energie-Eigenzustände so, dass

$$\int_0^a dx |u_E(x)|^2 = 1 \quad (6)$$

ist.

- (d) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass erwartungsgemäß die Energie-Eigenzustände zu verschiedenen Energie-eigenwerten orthogonal sind, d.h.

$$\int_0^a dx u_{E_1}^*(x) u_{E_2}(x) = 0 \quad \text{falls } E_1 \neq E_2. \quad (7)$$

- (e) (Zusatzaufgabe: 3 Extrapunkte) Zeigen Sie, dass für diese (etwas überidealisierte und daher unphysikalische!) Situation keine Impulsobservable definiert werden kann, weil der Impulsoperator  $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$  nicht selbstadjungiert ist. Verwenden Sie dazu, dass die oben ausgerechneten Energie-Eigenzustände eine vollständige Basis auf dem Hilbert-Raum der über das Intervall  $[0, a]$  quadratintegriblen Funktionen, die die Randbedingungen (2) erfüllen, bilden, und dass für alle  $u_E$  die Anwendung von  $\hat{p}$  aus diesem Raum herausführt, d.h.  $\hat{p}u_E(x)$  nicht mehr die Randbedingungen erfüllt.