Prof. U. Mosel, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2009**

Übungen zur Quantenmechanik I

Blatt 2 — 27.04.2009, Abgabetermin für Hausübungen: 04.05.2009

Präsenzaufgabe 3 (Diracsche δ-Distribution)

Zeigen Sie, daß

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\epsilon} \exp(-x^2/\epsilon^2), \quad \epsilon > 0, \tag{1}$$

für $\epsilon \to 0^+$ gegen die Diracsche δ-Funktion konvergiert, indem Sie

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x (x - x_0)^n \delta_\epsilon(x) \tag{2}$$

für $n \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ berechnen.

Präsenzaufgabe 4 (Fouriersche Formel)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, für deren Betrag das über ganz $\mathbb{R}$ erstreckte Integral existiert. Dann ist die Fouriertransformierte durch

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x) \exp(-\mathrm{i}kx) \tag{3}$$

definiert. Zeigen Sie, daß

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \tilde{f}(k) \exp(+\mathrm{i}kx) \tag{4}$$

gilt, indem Sie die Formel

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \exp(\mathrm{i}kx) \tag{5}$$

beweisen. Bestimmen Sie dazu mit Hilfe der Ergebnisse von Präsenzübung 2 zuerst die Fouriertransformierte $\tilde{\delta}_\epsilon$ der Funktion (1) aus Präsenzaufgabe 3 und zeigen dann, daß für diesen Fall (4) gilt, und diskutieren Sie den Limes $\epsilon \to 0$.

Präsenzaufgabe 5 (Lösung der freien Schrödingergleichung)

Finden Sie die allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung für ein freies Teilchen

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi(x,t). \tag{6}$$

(a) Schreiben Sie dazu die Wellenfunktion als Fouriertransformierte

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \tilde{\psi}(k,t) \exp(\mathrm{i}kx) \tag{7}$$

und lösen Sie die aus der Schrödingergleichung folgende Gleichung für $\tilde{\psi}(k,t)$.

(b) Zeigen Sie, daß die Normierungen der Wellenfunktion im Orts- und k-Bereich wie folgt zusammenhängen:

$$N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x |\psi(x,t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} |\tilde{\psi}(k,t)|^2. \tag{8}$$

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Schrödingergleichung, daß das Normierungsintegral $N(t) = \text{const.}$ sein muß. (Vgl. mit dem Resultat der vorigen Teilaufgabe!)

Beachten Sie die Hausübung auf der nächsten Seite!

Hausübung 2 (Gaußsches Wellenpaket III)

Wir betrachten wieder die zeitabhängige Schrödingergleichung für ein freies Teilchen (6). Zur Zeit $t = 0$ sei die Wellenfunktion durch die Fouriertransformierte

$$\widetilde{\psi}(k, t = 0) := \widetilde{\psi}_0(k) = N \exp\left[-\frac{(k - k_0)^2}{4\alpha}\right] \tag{9}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Normierungskonstante N, indem Sie die Wellenfunktion gemäß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \left|\widetilde{\psi}_0(k)\right|^2 = 1 \tag{10}$$

normieren.

(b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Wellenzahl k.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von Präsenzübung 5 die Wellenfunktion im Ortsraum $\psi(x, t)$.

(d) Berechnen Sie die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ im Ortsraum und vergleichen Sie sie mit dem in Hausübung 1 gegebenen Wellenpaket. Welche physikalische Interpretation ergibt sich daraus für die Wellenzahl k_0?

(e) Berechnen Sie $\Delta x(t) \Delta p(t)$!