Prof. U. Mosel, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2009**

Übungen zur Quantenmechanik I

Blatt 3 **04.05.2009, Abgabetermin für Hausübungen: 11.05.2009**

Präsenzaufgabe 6 (Wellenfunktionen im Kasten)

Betrachten Sie das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < b \\ \infty & \text{sonst,} \end{cases} \tag{1}$$

wobei $b > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und Energieeigenfunktionen für dieses Potential aus der zeitunabhängigen Schrödingergleichung:

$$\psi''(x) = [U(x) - \epsilon]\psi(x), \quad \text{mit} \quad \epsilon = \frac{2m}{\hbar^2}E, \quad U(x) = \frac{2m}{\hbar^2}V(x) \tag{2}$$

mit den Randbedingungen $\psi(\pm b) = 0$ (s. Vorlesung!). Skizzieren Sie die Wellenfunktionen! Wieviele Nullstellen („Knoten") hat die Wellenfunktion zum Energieeigenwert E_n ($n \in \mathbb{N}$)?

(b) Zeigen Sie, daß diese Wellenfunktionen ein Orthogonalsystem im Funktionenraum $\mathrm{L}^2[(-b, b)]$ bilden und normieren Sie sie auf 1, d.h.

$$\int_{-b}^{b} \mathrm{d}x \, \psi_n^*(x) \, \psi_{n'}(x) = \delta_{nn'} := \begin{cases} 1 & \text{für } n = n' \\ 0 & \text{für } n \neq n'. \end{cases} \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie, daß die Wellenfunktionen

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) \exp\left(-\frac{\mathrm{i}E_n t}{\hbar}\right), \quad c_n \in \mathbb{C} \tag{4}$$

die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \Psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right]\Psi(x,t) \tag{5}$$

lösen und daß die Norm durch

$$\int_{-b}^{b} \mathrm{d}x |\Psi(x,t)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \tag{6}$$

gegeben ist.

Hausübung 3 (Potentialtopf, Fortsetzung)
Wir betrachten weiter den Potentialtopf aus der Präsenzübung und untersuchen die folgende Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung:

$$\Psi(x,t) = N\left[\psi_1(x)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}E_1 t}{\hbar}\right) + \mathrm{i}\psi_2(x)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}E_2 t}{\hbar}\right)\right]. \tag{7}$$

(a) Bestimmen Sie N so, daß Ψ auf 1 normiert ist (beachten Sie dazu (6)!).

(b) Berechnen Sie für diese Wellenfunktion die Erwartungswerte $\langle x\rangle(t)$ und $\langle x^2\rangle(t)$. Vergleichen Sie dies mit dem klassischen Verhalten eines Teilchens in solch einem Potentialkasten.

Hausübung 4 (Potentialschwelle)
Betrachten Sie das Energieeigenwertproblem für den Fall der Potentialschwelle

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } x > 0, \end{cases} \tag{8}$$

wobei $V_0 > 0$.

(a) Zeigen Sie mittels (2), daß an der Sprungstelle $x = 0$ die Stetigkeitsbedingungen $\psi(0^-) = \psi(0^+)$ und $\psi'(0^-) = \psi'(0^+)$ gelten müssen.

(b) Berechnen Sie den vollständigen Satz von Eigenfunktionen $\psi_E(x)$ für beide Fälle $0 < E < V_0$ und $E > V_0$. Gibt es (nichttriviale) Lösungen mit $E < 0$?

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte j für die gefundenen stationären Lösungen.

(d) Diese Stromdichten können in der Form

$$j = j_{\text{rechts}}(x) - j_{\text{links}}(x) \tag{9}$$

in Anteile zerlegt werden, die von den nach links bzw. rechts laufenden Komponenten der Wellenfunktion herrühren. Diskutieren Sie die physikalische Bedeutung der gefundenen Lösungen anhand der durch diese Stromanteile definierten Transmissions- und Reflexionskoeffizienten:

$$T = \frac{j_{\text{rechts}}(x > 0)}{j_{\text{rechts}}(x < 0)}, \quad R = \frac{j_{\text{links}}(x < 0)}{j_{\text{rechts}}(x < 0)}. \tag{10}$$

Vergleichen Sie mit der entsprechenden Situation eines klassischen Teilchen. Zeigen Sie, daß stets $T + R = 1$ gilt.
