Prof. U. Mosel, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2009**

Übungen zur Quantenmechanik I

Lösungen zu Blatt 6 (Hausübung)

Hausübung 8 (Operatorexponentialfunktion)

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\hat{T}_{\vec{\xi}}\psi(\vec{x}) &= \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{\xi}\hat{\vec{p}}\right) \\ &= \left(\mathbb{1} - \vec{\xi}\vec{\nabla}_{\vec{x}} + \frac{(\vec{\xi}\vec{\nabla}_{\vec{x}})^2}{2!} + \cdots\right)\psi(\vec{x}).\end{aligned} \tag{1}$$

Das ist aber gerade die Taylorentwicklung von $\psi(\vec{x}-\vec{\xi})$ um $\vec{\xi}=0$, d.h.

$$\hat{T}_{\vec{\xi}}\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}-\vec{\xi}). \tag{2}$$

Daraus folgt sofort $\hat{T}_{\vec{\xi}}^{-1} = \hat{T}_{-\vec{\xi}}$, denn wegen (2) ist

$$\hat{T}_{-\vec{\xi}}\hat{T}_{\vec{\xi}}\psi(\vec{x}) = \hat{T}_{-\vec{\xi}}\psi(\vec{x}-\vec{\xi}) = \psi[(\vec{x}-\vec{\xi})-(-\vec{\xi})] = \psi(\vec{x}) = \mathbb{1}\psi(\vec{x}). \tag{3}$$

(b) Wegen (2) gilt

$$\left\langle \hat{T}_{\vec{\xi}}\psi_1 \,\middle|\, \hat{T}_{\vec{\xi}}\psi_2 \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x\,\psi_1^*(\vec{x}-\vec{\xi})\psi_2(\vec{x}-\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x'\,\psi_1^*(\vec{x}')\psi_2(\vec{x}') = \langle \psi_1 \,|\, \psi_2 \rangle, \tag{4}$$

d.h. $\hat{T}_{\vec{\xi}}$ ist unitär.

(c) Es ist

$$\left\langle \hat{U}\psi_1 \,\middle|\, \hat{U}\psi_2 \right\rangle = \left\langle \hat{U}^\dagger\hat{U}\psi_1 \,\middle|\, \psi_2 \right\rangle = \left\langle \hat{U}^{-1}\hat{U}\psi_1 \,\middle|\, \psi_2 \right\rangle = \langle \psi_1 \,|\, \psi_2 \rangle, \tag{5}$$

d.h. $\hat{U}$ ist unter der angegebenen Bedingung unitär.

(d) Da für $k \in \mathbb{N}$ stets $[(\mathrm{i}\hat{A})^k]^\dagger = [(\mathrm{i}\hat{A})^\dagger]^k = (-\mathrm{i}\hat{A}^\dagger)^k = (-\mathrm{i}\hat{A})^k$ gilt, ist

$$\hat{U}^\dagger = [\exp(\mathrm{i}\hat{A})]^\dagger = \exp(-\mathrm{i}\hat{A}). \tag{6}$$

Setzt man für $\hat{U}$ und $\hat{U}^\dagger$ die Exponentialreihe ein und sortiert nach Potenzen von $\hat{A}$, findet man in der Tat

$$\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \mathbb{1} \Rightarrow \hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}. \tag{7}$$

Zur Knobelaufgabe

Überlegt man sich den Beweis für $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ für komplexe Zahlen, wird klar, daß man dazu die Kommutativität der Multiplikation benötigt, um in der Exponentialreihe

$$(z_1+z_2)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} z_1^l z_2^{k-l} \tag{8}$$

schreiben zu können.

Setzen wir voraus, daß $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, also $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$, gilt der binomische Satz auch für Operatoren, d.h. wir haben

$$\exp(\hat{A} + \hat{B}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\hat{A} + \hat{B})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \frac{\hat{A}^l \hat{B}^{l-k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{\hat{A}^l \hat{B}^{l-k}}{l!(k-l)!}. \tag{9}$$

Andererseits gilt (wieder unter der Voraussetzung, daß $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutativ sind)

$$\exp(\hat{A}) \exp(\hat{B}) = \sum_{a,b=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^a \hat{B}^b}{a!b!}. \tag{10}$$

Ordnen wir diese Reihe nun um, so daß die Doppelsumme nach der Summe der Exponenten von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ geordnet ist, d.h. setzt man $a + b = k$ und $l = a$, findet man genau den Ausdruck von (9). Dabei lassen wir Konvergenzfragen hier außer acht!
Die Gleichung gilt also i.a. nur, wenn $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$ ist.