Übungen zur Quantenmechanik I

Lösungen zu Blatt 6 (Präsenzübung)

Präsenzaufgabe 10 (Eindimensionale Streutheorie)

(a) Für die angegebene Funktion ψ_E gilt

$$\begin{split}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\epsilon\right) u_E(x) &= \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\epsilon\right)\phi_E(x)}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\epsilon\right) G(x,x')}_{=\delta(x-x')} U(x') u_E(x') \\ &= U(x) u_e(x),\end{split} \tag{1}$$

und das war zu zeigen.

(b) Offensichtlich ist wegen $k^2=\epsilon$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\epsilon\right) G(x,x') = 0 \quad \text{für } x \neq x' \tag{2}$$

Integrieren wir die definierende Gleichung für die Greensche Funktion über ein kleines Intervall um $x \in \{x'-\eta, x'+\eta\}$ und lassen dann $\eta \to 0^+$ streben, finden wir für die Ableitung

$$\partial_x G_E(x'+0^+,x') - \partial_x G(x'-0^+,x') = 1, \tag{3}$$

und genau diese Sprungbedingung erfüllt die angegebene Greensche Funktion. Sie besitzt also genau die gewünschten Eigenschaften.

(c) Da voraussetzungsgemäß $V(x)=0$ für $|x|>a$, ist

$$\begin{split} u_E(x) &= \exp(\mathrm{i}kx) + \frac{\Theta(x-a)}{2\mathrm{i}k} \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x' \exp[\mathrm{i}k(x-x')] U(x') u_E(x') \\ &\quad + \frac{\Theta(-a-x)}{2\mathrm{i}k} \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x' \exp[\mathrm{i}k(x'-x)] U(x') u_E(x) \\ &\underset{|x|\to\infty}{\cong} \exp(\mathrm{i}kx) + \Theta(x-a)\tilde{t}(E)\exp(\mathrm{i}kx) + \theta(a-x) r(E) \exp(-\mathrm{i}kx). \end{split} \tag{4}$$

Daraus ergibt sich für die Transmissions- und Reflexionsamplitude

$$\begin{split} t(E) &= 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x'}{2\mathrm{i}k} \exp(-\mathrm{i}kx') U(x') u_E(x'), \\ r(E) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x'}{2\mathrm{i}k} \exp(+\mathrm{i}kx') U(x') u_E(x'). \end{split} \tag{5}$$

(d) Setzt man den Ansatz $\psi_E^{(0)}(x) = \phi_E^{(0)}(x) = \exp(\mathrm{i}kx)$ in die Rekursionsformel ein, ergibt sich für die 1. Bornsche Näherung

$$\psi_E^{(1)}(x) = \exp(\mathrm{i}kx) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x'}{2\mathrm{i}k} U(x') \left[\Theta(x-x')\exp(\mathrm{i}kx) + \Theta(x'-x)\exp(2\mathrm{i}kx' - \mathrm{i}kx)\right]. \tag{6}$$

(e) Setzt man entsprechend $u_E(x) = \psi_E^{(0)}(x) = \exp(\mathrm{i}kx)$ in (5) ein, findet man für die Transmissions- und Reflexionsamplituden die Näherungen

$$\begin{aligned} t^{(1)}(E) &= 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x'}{2\mathrm{i}k} U(x'), \\ r^{(1)}(E) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x'}{2\mathrm{i}k} \exp(2\mathrm{i}kx') U(x'). \end{aligned} \tag{7}$$

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

`http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/qm1-ss09/`