Prof. U. Mosel, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2009**

Übungen zur Quantenmechanik I

Blatt 9, Lösungen zur Präsenzübung

Präsenzaufgabe 12 (Kohärente Zustände)

(a) Die Wahrscheinlichkeit für die Messung eines bestimmten Energiewertes ist das Betragsquadrat des Koeffizienten vor der entsprechenden Energieeigenfunktion in der Entwicklung des Zustandes nach diesen Eigenfunktion, d.h.

$$W_n = \exp(-|\beta|^2)\frac{|\beta|^{2n}}{n!}. \tag{1}$$

Dies ist eine Poissonverteilung für n mit Erwartungswert $|\beta|^2$. Die erzeugende Funktion ist

$$G(z) = \exp(-|\beta|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|\beta|^2 z)^n}{n!} = \exp[(z-1)|\beta|^2]. \tag{2}$$

Der Erwartungswert der Energie ergibt sich daraus sofort zu

$$\langle E\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\langle 2n+1\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega\langle n\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega G'(1) = \frac{\hbar\omega}{2}(1+2|\beta|^2). \tag{3}$$

Dabei wurde benutzt, daß wegen (2)

$$G'(z) = \exp(-|\beta|^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\beta|^{2n}z^{n-1}}{n!}n \;\Rightarrow\; G'(1) = \langle n\rangle. \tag{4}$$

(b) Die Wellenfunktion ist

$$\Psi(x,t) = \exp\left(-\frac{|\beta|^2}{2} - \mathrm{i}\frac{\omega t}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}u_n(x)\exp(-\mathrm{i}n\omega t). \tag{5}$$

Die Oszillatoreigenfunktionen entnehmen wir dem Skript bzw. Übungsblatt 8:

$$u_n(x) = N_n \mathrm{H}_n(\xi)\exp(-\xi^2/2), \quad \text{mit} \quad \xi = x\alpha, \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \quad N_n = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}n!2^n}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Die erzeugende Funktion lautet

$$f(z,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\mathrm{H}_n(\xi) = \exp(-z^2+2z\xi). \tag{7}$$

Setzen wir (6) in (5) ein, liefert dann der Vergleich mit (7)

$$\begin{gathered}\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{1/4}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\xi^2 + \mathrm{i}\omega t - 4\xi y + 2y^2 + |\beta|^2\right)\right]\\ \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \quad \xi = \alpha x, \quad y = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\exp(-\mathrm{i}\omega t).\end{gathered} \tag{8}$$

Für das Folgende ist es noch bequem, $\beta = \beta_1 + \mathrm{i}\beta_2$ mit $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ zu schreiben.

(c) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist also eine Gaußverteilung in x:

$$P(x,t) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\left[\xi - \sqrt{2}[\beta_1 \cos(\omega t) + \beta_2 \sin(\omega t)]\right]^2\right\}, \tag{9}$$

und wir können die Erwartungswerte von x und x^2 mit Hilfe der Formeln auf Übungsblatt 1 berechnen:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle (t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x P(x,t) = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}[\beta_1 \cos(\omega t) + \beta_2 \sin(\omega t)], \\ \left\langle x^2 \right\rangle (t) &= \frac{1 + 4[\beta_1 \cos(\omega t) + \beta_2 \sin(\omega t)]^2}{2\alpha^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Daraus folgt

$$\Delta x(t) = \sqrt{\langle x \rangle^2 (t) - \langle x \rangle^2 (t)} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}. \tag{11}$$

Wir könnten nun den Erwartungswert für den Impuls ebenfalls direkt mit Hilfe der Operatoren und der Wellenfunktion berechnen, d.h. vermöge

$$\langle p \rangle (t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \Psi^*(x,t)(-\mathrm{i}\hbar\partial_x)\Psi(x,t). \tag{12}$$

Es ist im gegebenen Falle aber einfacher, das Ehrenfestsche Theorem anzuwenden. Demzufolge gilt nämlich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle x \rangle (t) = \left\langle \frac{1}{\mathrm{i}\hbar} \left[\hat{x}, \hat{H}\right] \right\rangle (t) = \frac{1}{m} \langle p \rangle (t), \tag{13}$$

wie man sofort aus der kanonischen Kommutatorrelation

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar \mathbb{1} \tag{14}$$

entnimmt. Es ist also

$$\langle p \rangle (t) = m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle x \rangle (t) = \sqrt{2}\alpha\hbar[\beta_2 \cos(\omega t) - \beta_1 \sin(\omega t)]. \tag{15}$$

Den Erwartungswert des Impulsquadrats finden wir aus dem Erwartungswert für die Energie (3) und (10) wie folgt:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2m} \left\langle p^2 \right\rangle (t) + \frac{m\omega^2}{2} \left\langle x^2 \right\rangle (t), \tag{16}$$

also

$$\left\langle p^2 \right\rangle (t) = 2m \left[\langle E \rangle - \frac{m\omega^2}{2} \left\langle x^2 \right\rangle (t)\right] = \frac{\alpha^2\hbar^2}{2} \left\{1 + 4[\beta_2 \cos(\omega t) - \beta_1 \sin(\omega t)]^2\right\} \tag{17}$$

und damit

$$\Delta p(t) = \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2}}. \tag{18}$$

(d) Die Erwartungswerte für Ort und Impuls gehorchen den Lösungen der klassischen Oszillatorgleichung mit den Anfangsbedingungen

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}\beta_1}{\alpha}, \quad p_0 = \sqrt{2}\hbar\alpha. \tag{19}$$

Die Gesamtenergie dieses klassischen Teilchens im Oszillatorpotential beträgt also

$$E_{\text{cl}} = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x_0^2}{2} = \hbar\omega(\beta_1^2 + \beta_2^2) = \hbar\omega|\beta|^2, \tag{20}$$

d.h. bis auf die quantenmechanische Nullpunktsenergie stimmt die quantenmechanische Bewegung der Erwartungswerte mit der Bewegung eines klassischen Teilchens im Oszillatorpotential überein. Für $|\beta|^2 \gg 1$ läßt sich die Bewegung des Teilchens in einem kohärenten Zustand also kaum von der entsprechenden Bewegung eines klassischen Teilchens unterscheiden.

(e) Multiplizieren wir die zweite Gleichung in (10) und (18) finden wir

$$\Delta x(t)\Delta p(t) = \frac{\hbar}{2}, \tag{21}$$

d.h. der kohärente Zustand eines harmonischen Oszillators ist ein Zustand, in dem das Unschärfeprodukt seinen minimalmöglichen Wert annimmt. Für $|\beta|^2 \gg 1$ sind zudem die Orts- und Impulsunschärfen klein gegenüber den Erwartungswerten der Größen selbst, d.h. wie schon bei der Nullpunktsenergie sind die quantenmechanischen Schwankungen der Größen vernachlässigbar, d.h. ein kohärenter Zustand mit großem $|\beta|^2$ ist die beste Annäherung des quantenmechanischen Verhaltens eines Teilchens im Oszillatorpotential an das Verhalten eines klassischen Teilchens.

Der wesentliche Unterschied zum Gaußschen Wellenpaket eines freien Teilchens und einem kohärente Zustand ist, daß die Ortsunschärfe beim kohärenten Zustand zeitlich konstant bleibt, während sie beim freien Teilchen mit der Zeit unvermeidbar breiter wird (vgl. Hausübung 2 auf Übungsblatt 2).

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/qm1-ss09/`