Prof. U. Mosel, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2009**

Übungen zur Quantenmechanik I

Blatt 10, Lösungen zur Präsenzübung

Präsenzaufgabe 13 (Schwarzsche Ungleichung etc.)

(a) Es gilt

$$\|a \pm b\|^2 = \langle a \pm b \,|\, a \pm b \rangle = \langle a \,|\, a \rangle \pm \langle a \,|\, b \rangle \pm \langle b \,|\, a \rangle + \langle b \,|\, b \rangle . \tag{1}$$

Addiert man beide Gleichungen, ergibt sich sofort die Behauptung:

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2 \langle a \,|\, a \rangle + 2 \langle b \,|\, b \rangle = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2. \tag{2}$$

(b) Sei $|a\rangle \neq 0$. Die Zerlegung des Vektors $|b\rangle$ in Komponenten parallel und senkrecht zu $|a\rangle$ lautet

$$|b\rangle = \underbrace{|a\rangle \frac{\langle a \,|\, b \rangle}{\|a\|^2}}_{|b_\parallel\rangle} + \underbrace{|b\rangle - \left|b_\parallel\right\rangle}_{|b_\perp\rangle} . \tag{3}$$

Es gilt

$$\|b\|^2 = \|b_\parallel + b_\perp\|^2 = \|b_\parallel\|^2 + \|b_\perp\|^2 \geq \|b_\parallel\|^2, \tag{4}$$

denn es ist offenbar

$$\left\langle b_\parallel \,\middle|\, b_\perp \right\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle a \,|\, b_\perp \rangle = 0. \tag{5}$$

Wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts gilt in (4) das Gleichheitszeichen genau dann, wenn

$$\|b_\perp\| = 0 \Leftrightarrow |b_\perp\rangle = 0. \tag{6}$$

Weiter ist

$$|\langle a \,|\, b \rangle|^2 = \langle b \,|\, a \rangle \langle a \,|\, b \rangle = \|a\|^2 \left\langle b \,\middle|\, b_\parallel \right\rangle = \|a\|^2 \|b_\parallel\|^2 \stackrel{(4)}{\leq} \|a\|^2 \|b\|^2. \tag{7}$$

Zieht man daraus die Quadratwurzel folgt die behauptete Schwarzsche Ungleichung:

$$|\langle a \,|\, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|. \tag{8}$$

(c) Das Gleichheitszeichen gilt aufgrund der Bemerkung unmittelbar nach (5) dann und nur dann, wenn $|b\rangle = \left|b_\parallel\right\rangle$, d.h. wenn $|b\rangle = \lambda |a\rangle$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Präsenzaufgabe 14 (Operatoren)

(a) Es gilt

$$\mathbf{C}^\dagger = \lambda^* \mathbf{A}^\dagger + \mu^* \mathbf{B}^\dagger. \tag{9}$$

Begründung: Für irgendwelche Zustandsvektoren $|a\rangle, |b\rangle$ gilt

$$\begin{aligned} \langle a \,|\, (\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}) b \rangle &= \lambda \langle a \,|\, \mathbf{A} b \rangle + \mu \langle a \,|\, \mathbf{B} b \rangle = \lambda \left\langle \mathbf{A}^\dagger a \,\middle|\, b \right\rangle + \mu \left\langle \mathbf{B}^\dagger \,\middle|\, b \right\rangle \\ &= \left\langle (\lambda^* \mathbf{A}^\dagger + \mu^* \mathbf{B}^\dagger) a \,\middle|\, b \right\rangle . \end{aligned} \tag{10}$$

(b)
$$\langle a \,|\, \mathbf{A}b \rangle = \langle a \,|\, \psi \rangle \langle \phi \,|\, b \rangle = \langle \langle a \,|\, \psi \rangle^* \phi \,|\, b \rangle = \langle \langle \psi \,|\, a \rangle \phi \,|\, b \rangle . \tag{11}$$

Das linke Argument im Skalarprodukt ist

$$\langle \psi \,|\, a \rangle |\phi\rangle = |\phi\rangle \langle \psi \,|\, a \rangle =: \mathbf{A}^\dagger |a\rangle , \tag{12}$$

und daraus folgt

$$\mathbf{A}^\dagger = |\phi\rangle \langle \psi| . \tag{13}$$

(c) Wegen der Hermitezität von **A** gilt

$$A_{kl} = \langle u_k \,|\, \mathbf{A}u_l \rangle = \langle \mathbf{A}u_k \,|\, u_l \rangle = \langle u_l \,|\, \mathbf{A}u_k \rangle^* = A^*_{lk}, \tag{14}$$

und das war zu zeigen.

(d) Es ist wegen der Orthonormalität des VONS $|v_j\rangle$

$$\langle v_l \,|\, u_k \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v_l \,|\, v_j \rangle U_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{lj} U_{jk} = U_{lk}. \tag{15}$$

(e) Wegen der Vollständigkeit des VONS $|v_k\rangle$ ist

$$|v_j\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k\rangle \langle u_k \,|\, v_j \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k\rangle \langle v_j \,|\, u_k \rangle^* = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k\rangle U^*_{jk}. \tag{16}$$

Faßt man U_{jk} als unendlichdimensionale Matrix auf, gilt $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$. Die Matrix ist also unitär. Wie in der linearen Algebra erfolgt eine Basistransformation also durch eine unitäre Matrix.

Bemerkung: Man kann die Transformation auch durch eine unitäre Abbildung **U** ausdrücken:

$$|u_k\rangle = \mathbf{U} |v_k\rangle . \tag{17}$$

Daß **U** unitär ist, folgt aus der Forderung, daß sowohl die $|u_k\rangle$ als auch die $|v_k\rangle$ vollständige Orthonormalsysteme sind. Zunächst gilt

$$\delta_{jk} = \langle u_j \,|\, u_k \rangle = \langle \mathbf{U}v_j \,|\, \mathbf{U}v_k \rangle = \left\langle v_j \,\middle|\, \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} v_k \right\rangle . \tag{18}$$

Wegen der Vollständigkeit der $|v_j\rangle$ gilt andererseits

$$\mathbb{1} = \sum_{j=1}^{\infty} |v_j\rangle \langle v_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |v_j\rangle \delta_{jk} \langle v_k| = \sum_{j=1}^{\infty} |v_j\rangle \left\langle v_j \,\middle|\, \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} v_k \right\rangle \langle v_k| = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U}. \tag{19}$$

Multipliziert man also (17) von links her mit $\mathbf{U}^\dagger$ folgt

$$\mathbf{U}^\dagger |u_k\rangle = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} |v\rangle_k = |v_k\rangle . \tag{20}$$

Wiederholt man nun dieselbe Rechnung, die auf (19) geführt hat, findet man, daß auch

$$\mathbb{1} = (\mathbf{U}^\dagger)^\dagger \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger. \tag{21}$$

Dabei wurde verwendet, daß für einen beliebigen Operator **A** gilt:

$$(\mathbf{A}^\dagger)^\dagger = \mathbf{A}. \tag{22}$$

Zusammen mit (19) bedeutet (21), daß **U** ein Inverses besitzt und

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger \tag{23}$$

ist, d.h. **U** ist tatsächlich unitär.

(f) Es ist

$$A'_{jk} = \langle v_j \,|\, \mathbf{A} v_k \rangle = \sum_{l,m=1}^{\infty} \langle v_j \,|\, u_l \rangle \langle u_l \,|\, \mathbf{A} u_m \rangle \langle u_m \,|\, v_k \rangle = \sum_{l,m=1}^{\infty} U_{jl} A_{lm} U^*_{km}. \tag{24}$$

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

`http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/qm1-ss09/`