Prof. U. Mosel, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2009**

Übungen zur Quantenmechanik I

Blatt 11, Lösungen zur Hausübung

Hausübung 14 (Wellenfunktion in Kugelkoordinaten)

(a) Es gilt

$$\vec{r} = r[(\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y)\sin\vartheta + \cos\vartheta \vec{e}_z]. \tag{1}$$

Daraus folgt für die Wellenfunktion

$$\psi(\vec{r}) = Nr[(\cos\varphi + \sin\varphi)\sin\vartheta + 3\cos\vartheta]f(r). \tag{2}$$

(b) Da abgesehen von dem Radialanteil nur Terme **linear** in $\vec{r}$ vorkommen, benötigen wir nur die Kugelflächenfunktionen für $l = 1$:

$$\mathrm{Y}_{10}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta, \quad \mathrm{Y}_{1,\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\exp(\pm \mathrm{i}\varphi). \tag{3}$$

Unter Verwendung von

$$\cos\varphi = \frac{\exp(\mathrm{i}\varphi) + \exp(-\mathrm{i}\varphi)}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\exp(\mathrm{i}\varphi) - \exp(-\mathrm{i}\varphi)}{2\mathrm{i}} \tag{4}$$

ergibt sich daraus

$$\psi(\vec{r}) = Nrf(r)\left\{\sqrt{\frac{2\pi}{3}}[(1+\mathrm{i})\,\mathrm{Y}_{1,-1}(\vartheta,\varphi) - (1-\mathrm{i})\,\mathrm{Y}_{11}(\vartheta,\varphi)] + \sqrt{12\pi}\,\mathrm{Y}_{10}(\vartheta,\varphi)\right\}. \tag{5}$$

Mögliche Meßwerte für $\vec{l}^2$ und l_z sind also $\hbar^2 1(1+1) = 2\hbar^2$ bzw. $\hbar$, 0 und $-\hbar$.

(c) Die Norm der Wellenfunktion ist wegen der Orthonormiertheit der Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x |\psi(\vec{r})|^2 = |N|^2 \underbrace{\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^4 |f(r)|^2}_{N_r}\left[2\times\frac{2\pi}{3} + 2\times\frac{2\pi}{3} + 12\pi\right] = \frac{44\pi}{3}|N|^2 N_r \\
&\Rightarrow N = \sqrt{\frac{3}{44\pi N_r}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Die Wahrscheinlichkeiten, bei einer Messung von l_z die Werte $\hbar$, 0 oder $-\hbar$ zu finden, sind (wieder wegen der Orthonormiertheit der Kugelflächenfunktionen)

$$\begin{aligned}
l_z = 0: \quad & |N|^2 \int_0^r \mathrm{d}r r^4 |f(r)|^2 12\pi = \frac{3}{44\pi}12\pi = \frac{9}{11}, \\
l_z = \pm\hbar: \quad & |N|^2 \int_0^r \mathrm{d}r r^4 |f(r)|^2 \frac{4\pi}{3} = \frac{3}{44\pi}\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{11}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung von $\vec{l}^2$ den Wert $2\hbar^2$ zu finden, ist $9/11+1/11+1/11 = 1$. Dies folgt auch bereits daraus, daß $\psi(\vec{r})$ eine Eigenfunktion von $\hat{\vec{l}}^2$ ist, d.h. das Teilchen einen wohlbestimmten Wert für diese Observable besitzt, nämlich $2\hbar^2$, und bei einer Messung dieser Observablen findet man also mit Bestimmtheit eben diesen Wert!

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/qm1-ss09/`