Übungen zur Quantenmechanik I

Blatt 11, Lösungen zur Präsenzübung

Präsenzaufgabe 15 (Teilchen im homogenen Magnetfeld)

(a) Es gilt

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_j \epsilon_{jkl} \partial_k A_l = \vec{e}_z \partial_x A_y = B \vec{e}_z, \tag{1}$$

und das ist gerade das gegebene homogene Magnetfeld in z-Richtung.

(b) Der Hamiltonoperator lautet

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} \left[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 - \frac{2qB}{c} \hat{x} \hat{p}_y + \hat{p}_z^2 + \frac{q^2 B^2}{c^2} \hat{x}^2 \right]. \tag{2}$$

Dabei haben wir beim Ausmultiplizieren des Ausdrucks $(\hat{\vec{p}} - e/c\vec{A})^2$ von der Vertauschbarkeit der Operatoren $\hat{p}_y$ und $\hat{x}$ Gebrauch gemacht.

Zur Lösung des Energieeigenwertproblems müssen wir zunächst einen vollständigen Satz kompatibler Observabler finden, nach deren Eigenwerten wir die Energieeigenvektoren klassifizieren können. Da $\hat{y}$ und $\hat{z}$ im Hamiltonoperator nicht auftreten, vertauscht der Hamiltonoperator mit $\hat{p}_y$ und $\hat{p}_z$. Da weiter diese Operatoren auch untereinander vertauschen, können wir also als vollständigen Satz $\hat{H}$, $\hat{p}_y$ und $\hat{p}_z$ wählen. Den dazugehörigen Eigenket bezeichnen wir mit $|E, p_y, p_z\rangle$. Die zu lösende Energieeigenwertgleichung lautet also

$$\hat{H} |E, p_y, p_z\rangle = E |E, p_y, p_z\rangle . \tag{3}$$

Den Hamiltonoperator (2) auf den Eigenket angewandt, liefert

$$\hat{H} |E, p_y, p_z\rangle = \frac{1}{2\mu} \left[p_z^2 + p_y^2 + \hat{p}_x^2 - \frac{2qBp_y}{c} \hat{x} + \frac{q^2 B^2}{c^2} \hat{x}^2 \right] |E, p_y, p_z\rangle . \tag{4}$$

Formt man den Ausdruck in der eckigen Klammer ein wenig um, erhält man

$$\hat{H} |E, p_y, p_z\rangle = \left[\frac{p_z^2}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} \hat{p}_x^2 + \frac{\mu \omega^2}{2} (\hat{x} - x_0)^2 \right] |E, p_y, p_z\rangle . \tag{5}$$

Dabei haben wir zur Abkürzung

$$\omega = \frac{|qB|}{\mu c}, \quad x_0 = \frac{c}{qB} p_y \tag{6}$$

gesetzt. Das ist bis auf den konstanten Term $p_z^2/(2\mu)$, d.h. die kinetische Energie der freien Bewegung in z-Richtung, der Hamiltonoperator eines Teilchens, das entlang der x-Achse um die Ruhelage x_0 schwingt. Die Eigenwerte dieses verbleibenden Operators sind also die Energieeigenwerte eines harmonischen Oszillators. Die Energieeigenwerte des Teilchens sind also

$$E = E_n = \frac{p_z^2}{2\mu} + \frac{\hbar \omega}{2} (2n+1), \quad \text{mit} \quad n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}. \tag{7}$$

Die Energieeigenwerte hängen nicht von p_y ab, d.h. der Zustand zu gegebener Energie E_n ist unendlichfach entartet.

Bemerkungen

Die Wellenfunktion zum Energieeigenwert n lautet

$$\psi_{n,p_y,p_z}(\vec{r}) = \langle \vec{r} \,|\, E_n, p_y, p_z \rangle = N \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(yp_y + zp_z)\right] \mathrm{H}_n(\xi) \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] \tag{8}$$

mit

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}(x - x_0). \tag{9}$$

N ist eine Normierungskonstante.

(c) Die kanonischen Kommutatorrelationen für Orts- und Impulsoperatoren sind

$$[\hat{x}_j, \hat{p_k}] = \mathrm{i}\hbar\delta_{jk}\mathbb{1}. \tag{10}$$

Die Kommutatorrelationen mit $\hat{H}$ lassen sich daraus mit Hilfe der allgemeinen Formel

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right] \tag{11}$$

berechnen. Damit finden wir:

$$\begin{aligned} \hat{v}_x &= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\frac{1}{2\mu}\left[\hat{x}, \hat{p}_x^2\right] = \frac{1}{\mu}\hat{p}_x, \\ \hat{v}_y &= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\frac{1}{2\mu}\left[\hat{y}, \hat{p}_y^2 - \frac{2qB}{c}\hat{p}_y\hat{x}\right] = \frac{1}{\mu}\hat{p}_y - \frac{qB}{c}\hat{x}, \\ \hat{v}_z &= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\frac{1}{2\mu}\left[\hat{z}, \hat{p}_z^2\right] = \frac{1}{\mu}\hat{p}_z. \end{aligned} \tag{12}$$

Allgemein gilt

$$\hat{\vec{v}} = \frac{1}{\mu}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}\right). \tag{13}$$

Dies ist auch aus der klassischen Hamiltonschen Mechanik bekannt: Die kanonischen Impulse sind bei Anwesenheit von Magnetfeldern nicht identisch mit dem mechanischen Impuls.

(d) Ein Zustand $\psi(\vec{x})$ erhält unter (statischen) Eichtransformationen

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}) \tag{14}$$

einen Phasenfaktor, d.h. nach Umeichen des Vektorpotentials für das Magnetfeld, ist die Wellenfunktion

$$\psi'(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\chi(\vec{r})\right] \tag{15}$$

zu verwenden. Wenden wir also die eichtransformierte Geschwindigkeit (13) auf die eichtransformierte Wellenfunktion an, erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{\vec{v}}'\psi(\vec{r}) &= \frac{1}{\mu}\left[-\mathrm{i}\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi)\right]\psi(\vec{r}) \exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\chi(\vec{r})\right] \\ &= \frac{1}{\mu}\left[-\mathrm{i}\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) - \frac{q}{c}\vec{A}\psi(\vec{r})\right] \exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\chi(\vec{r})\right] = \left[\hat{\vec{v}}\psi(\vec{r})\right] \exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\chi(\vec{r})\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Damit folgt für den Erwartungswert

$$\begin{aligned}\langle \vec{v}' \rangle_{\psi'} &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r \psi'^*(\vec{r}) \hat{\vec{v}}' \psi'(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r \exp\left[-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\chi(\vec{r})\right] \psi^*(\vec{r}) \hat{\vec{v}} \psi(\vec{r}) \exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\chi(\vec{r})\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r \psi^*(\vec{r}) \hat{\vec{v}} \psi(\vec{r}) = \langle \vec{v} \rangle_{\psi} .\end{aligned} \tag{17}$$

Der Erwartungswert der Geschwindigkeit des Teilchens ist also **eichunabhängig** wie es für eine observable Größe sein muß.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

`http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/qm1-ss09/`