Vorlesung QM I, 20.05.09

Struktur der QM

(1) Der Zustand eines quantenmechanischen Systems (Teilchen, Atom, Molekül etc.) wird durch eine quadratintegrable Funktion

$$\psi(\vec{x}, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \in L_2(\mathbb{R})$$

beschrieben. Im folgenden normieren wir sie auf 1

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\, |\psi(\vec{x}, t)|^2 = 1$$

Die Funktion

$$\rho(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2$$

gibt dann die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte an, d.h.

$$\rho(\vec{x}, t)\, d^3\vec{x}$$

ist die Wsk das Teilchen bei $\vec{x}$ innerhalb eines kleinen Volumens $d^3\vec{x}$ zu finden (Ortsmessung).

(2) Die Observablen des Systems werden durch hermitesche (genauer selbstadjungierte Operatoren) repräsentiert.

Beispiele:

Ortskoordinaten: $\vec{x}$	$\hat{\vec{x}}\, \psi(\vec{x}, t) = \vec{x}\, \psi(\vec{x}, t)$
Impulskoordinaten: $\vec{p}$	$\hat{\vec{p}}\, \psi(\vec{x}, t) = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\vec{x}}\, \psi(\vec{x}, t)$
Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$	$\hat{\vec{L}}\, \psi(\vec{x}, t) = \vec{x} \times \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\vec{x}}\, \psi(\vec{x}, t)$

(3) Mögliche Meßwerte einer Observablen O, repräsentiert durch den hermiteschen Operator $\hat{O}$ sind die Eigenwerte dieses Operators. Seien $u_{o,\alpha}(\vec{x})$ die dazugehörigen Eigenvektoren:

$$\hat{O}\, u_{o,\alpha}(\vec{x}) = o\, u_{o,\alpha}(\vec{x})$$

(α numeriert die evtl. vorhandenen mehrfachen Eigenzustände zu $\hat{O}$ durch)

Sie bilden einen vollst. Orthonormalsystem. Dabei können die Eigenwerte sowohl kontinuierlich (wie bei $\vec{x}$ und $\vec{p}$) als auch diskret (z.B. beim Drehimpuls $\vec{L}^2$ und L_z) sein.
Im folgenden nehmen wir an, die Eigenfunktionen sind wie folgt normiert:

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\; u^*_{o',\alpha'}(\vec{x})\; u_{o,\alpha}(\vec{x}) = \delta(o-o')\,\delta(\alpha-\alpha'),$$

wobei die δ-Funktionen auch für Kronecker-δ's stehen können, falls o und α diskrete Variable sind.
Die Wellenfunktion läßt sich dann nach Eigenzuständen von $\hat{O}$ entwickeln:

$$\psi(\vec{x},t) = \int do \int d\alpha\; C(o,\alpha;t)\, u_{o,\alpha}(\vec{x}),$$

wo die Integrale über die möglichen Werte von o und α zu nehmen sind. Für die Koeffizienten gilt:

$$C(o,\alpha;t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\; u^*_{o,\alpha}(\vec{x})\; \psi(\vec{x},t)$$

(4) Ist das System im Zustand ψ präpariert, so ist die Wsk bei der Messung der Observablen O, den Wert o zu messen,

$$P(o,t) = \int d\alpha\; |C(o,\alpha;t)|^2.$$

(Bornsche Wsk.-Interpretation der Wellenfkt.)

(5) Es existiert ein Operator $\hat{H}$, der der Energie (Hamiltonfunktion) des Systems entspricht, der die Zeitentwicklung der Wf. angibt

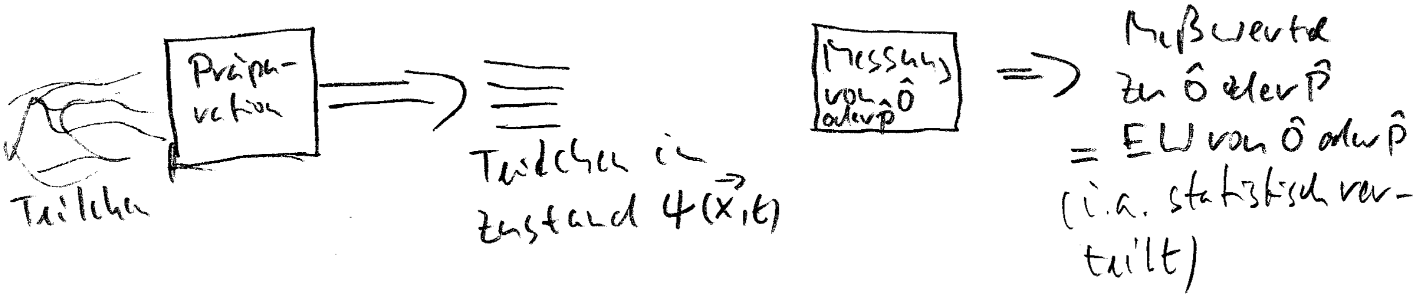
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x},t) = \hat{H}\, \psi(\vec{x},t)$$

(zeitabh. Schrödingergleichung).
Falls $\hat{H}$ nicht explizit zeitabh. ist, ist eine (formale) Lösung

$$\psi(\vec{x},t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\psi(\vec{x},t=0)$$

"Simultane" Messungen

Da die QM i.a. nur Wsk-Aussagen macht, müssen bei ihrer experimentellen Überprüfung eine große Zahl von Systemen (voneinander unabhängig) immer gleichartig präpariert werden. Dann können an jedem System beliebige Observablen gemessen werden:



Wir messen also zunächst $\hat{O}$ an hinreichend vielen gleichartig präparierten Systemen, sodaß wir die Statistik für die möglichen Meßwerte von $\hat{O}$ (die stets Eigenwerte von $\hat{O}$ sein müssen). Nach Postulaten (3) und (4) kann $\hat{O}$ nur dann einen wohlbestimmten Wert o besitzen, wenn $\psi = \tilde{u}_o(\vec{x})$ (wobei wir annehmen, daß die EWe von $\hat{O}$ nicht entartet sind (zur Vereinfachung). Dann können wir dasselbe für $\hat{P}$ durchführen, wieder an dem in Zustand ψ präparierten Teilchen!

Unschärferelation

Für die Messung zweier Observablen an im Zustand ψ präparierten Systemen, gilt die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\langle(\Delta\hat{O})^2\rangle\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle\hat{Q}\rangle|^2$$

mit $\hat{Q} = \frac{1}{i}[\hat{O},\hat{P}]$

und
$$(\Delta\hat{O})^2 = \langle\hat{O}^2\rangle - \langle\hat{O}\rangle^2 := \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\, \psi^*(\vec{x})\, \hat{O}^2\, \psi(\vec{x}) - \left(\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\, \psi^*(\vec{x})\, \hat{O}\, \psi(\vec{x})\right)^2$$

Die Meßwerte von $\hat{O}$ und $\hat{P}$ können nur dann simultan durch Präparation der Teilchen im Zustand ψ determiniert sein, wenn

$$[\hat{O}, \hat{P}] = 0,$$

d.h. wenn $\hat{O}$ und $\hat{P}$ kommutieren.

Sie können es nur dann sein, wenn ψ gleichzeitig Eigenvektor zu $\hat{O}$ und $\hat{P}$ ist. Es wurde in der vorigen Vl. gezeigt, daß

$$[\hat{O}, \hat{P}] = 0 \Longleftrightarrow \exists \text{ VONS simultaner EVn von } \hat{O} \text{ und } \hat{P}$$

Vollständiger Satz kompatibler Observablen

Zwei Observablen $\hat{O}$ und $\hat{P}$ heißen kompatibel, wenn es Zustände gibt, in denen sie simultan exakt determiniert sind, d.h. wenn $[\hat{O}, \hat{P}] = 0$ ist.

Ein Satz von Observablen $(\hat{O}_1; \hat{O}_2; \dots; \hat{O}_n)$ heißt ein vollständiger kompatibler Satz von Operatoren, wenn

$$[\hat{O}_j; \hat{O}_k] = 0 \quad \text{für alle } j,k \in \{1; \dots; n\}$$

und zu jedem n-Tupel

$$(o_1; o_2; \dots; o_n)$$

von Eigenwerten nur genau ein (bis auf einen Faktor) eindeutig bestimmter simultaner Eigenvektor

$$\psi_{(o_1; o_2; \dots; o_n)}(\vec{x})$$

existiert.

Beispiele

(a) Ortseigenfunktionen

$$\hat{\vec{x}}\, \psi_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = \vec{x}_0\, \psi_{\vec{x}_0}(\vec{x})$$

Da $[\hat{x}_j, \hat{x}_k] = 0$, können die $\vec{x}$-Komponenten simultan determiniert sein $\Rightarrow \exists$ simultane Eigenzustände

5a

$$\Rightarrow (\vec{x}-\vec{x}_0)\, u_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = 0$$

$$\Rightarrow u_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = A(\vec{x}_0)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

$$\langle u_{\vec{x}_0'} | u_{\vec{x}_0}\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\; A^*(\vec{x}_0')\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_0')\; A(\vec{x}_0)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

$$= |A(\vec{x}_0)|^2\,\delta^{(3)}(\vec{x}_0'-\vec{x}_0)$$

$$\Rightarrow |A(\vec{x}_0)|^2 = 1 \Rightarrow u_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

(b) Impulseigenfunktionen

$[\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0 \Rightarrow \exists$ simultane Eigenzustände für drei Komponenten von $\hat{\vec{p}}$.

$$\hat{\vec{p}}\, u_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} u_{\vec{p}}(\vec{x}) \overset{!}{=} \vec{p}\, u_{\vec{p}}(\vec{x})$$

$$\Rightarrow u_{\vec{p}}(\vec{x}) = A(\vec{p})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{x}\right)$$

$$\langle u_{\vec{p}'} | u_{\vec{p}}\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\; u^*_{\vec{p}'}(\vec{x})\, u_{\vec{p}}(\vec{x})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\; A^*(\vec{p}')\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{p}'\vec{x}\right)\cdot A(\vec{p})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{x}\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\; A^*(\vec{p}')\,A(\vec{p})\exp\left[\frac{i}{\hbar}\vec{x}(\vec{p}-\vec{p}')\right]$$

$$= |A(\vec{p})|^2 (2\pi)^3\,\delta^{(3)}\left(\frac{\vec{p}-\vec{p}'}{\hbar}\right)$$

$$= |A(\vec{p})|^2 (2\pi\hbar)^3\,\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$$

$$\Rightarrow A(\vec{p}) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} \Rightarrow u_{\vec{p}}(\vec{x}) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{x}\right)$$

(c) Drehimpuls

In der vorigen Übung haben wir gesehen, daß

$$[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = \varepsilon_{jkl}\,\hat{L}_l \neq 0,$$

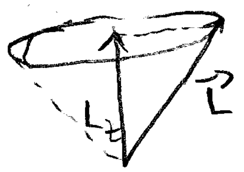
d.h. die drei Komponenten des Drehimpulses können nicht simultan determiniert sein. Wir haben weiter gesehen, daß

$$[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_j] = 0 \quad \text{für alle } j \in \{1,2,3\}$$

ist. Wir können also $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ simultan bestimmen.

Für einen vollständigen Satz benötigen wir noch eine Observable, die mit $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ kommutiert, z.B. $r = |\vec{x}|$ oder $p = |\vec{p}|$.

Jedenfalls ist mit $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ der Drehimpuls in x,y-Richtung unbestimmt. Er präzediert sozusagen um die z-Richtung



Aufeinanderfolgende Messungen

Angenommen wir messen eine Observable $\hat{O}$ mit Resultat O_n zur Zeit t. Angenommen O_n ist nicht entartet, so ist das System in Zustand $u_{O_n} = \varphi_n$ (zur Zeit t). Die Wellenfunktion entwickelt sich und der Schrödingergleichung:

$$i\hbar\,\partial_t \psi(\vec{x},t) = \hat{H}\,\psi(\vec{x},t) \quad \text{mit } \psi(\vec{x},t=0) = \varphi_n(\vec{x})$$

Seien nun $u_k(\vec{x})$ ein vollst. ONS von Energieeigenvektoren

$$\hat{H}\,u_k(\vec{x}) = E_k\,u_k(\vec{x})$$

Dann gilt

$$\psi(\vec{x},t) = \sum_k a_k(t)\,u_k(\vec{x})$$

$$\Rightarrow i\hbar\,\partial_t\psi(\vec{x},t) = i\hbar\sum_k \dot{a}_k(t)\,u_k(\vec{x}) = \sum_k a_k(t)\,\hat{H}\,u_k(\vec{x})$$

$$= \sum_k E_k\,a_k(t)\,u_k(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \dot{a}_k = -\frac{i}{\hbar}E_k\,c_k$$

$$\Rightarrow a_k(t) = c_k \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_k t\right)$$

$$\Rightarrow \psi(\vec{x},t) = \sum_k a_k(t)\,u_k(\vec{x}) = \sum_k c_k\,u_k(\vec{x})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_k t\right)$$

Aus $\psi(\vec{x},t=0) = \varphi_n(\vec{x})$

folgt
$$c_k = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\;\varphi_k^*(\vec{x})\,u_k(\vec{x})\,.\,.$$

Messen wir zur Zeit $t>0$ eine Observable $\hat{P}$ und erhalten den Eigenwert p_l zur EF $\tilde{\varphi}_l(\vec{x})$, so ist dieser Wert selbst für $[\hat{O},\hat{P}]=0$ nicht notwendig determiniert, denn die Wsk. dafür ist:

$$P_{\varphi_l}(t) = \left| \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\, \tilde{\varphi}_l^*(\vec{x})\, \psi(\vec{x},t) \right|^2$$

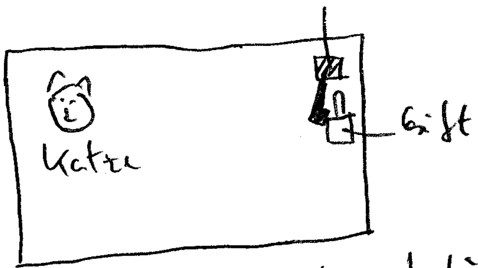
$$= \left| \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\, \tilde{\varphi}_l^*(\vec{x}) \sum_n c_n u_n(\vec{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) \right|^2$$

$$= \left| \sum_n c_n \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\varphi}_l^*(\vec{x})\, u_n(\vec{x}) \right|^2$$

In dem Fall lautet die Wellenfunktion nach der Messung von $\hat{P}$

$\tilde{\varphi}_l(\vec{x}) \underset{\text{i.a.}}{\neq} \varphi_n(\vec{x})$.

Schrödingers Katze



Ein radioaktives Material löse bei einem Zerfall einen Hammer aus, der einen Giftbehälter zerstört, was die Katze tötet. Der Kasten sei verschlossen, so daß man nicht weiß ob die Katze noch lebt. Sei die Zerfallsrate gerade so, daß in einer Stunde mit Wsk $\frac{1}{2}$ die Katze noch lebt. Der Zustand ist

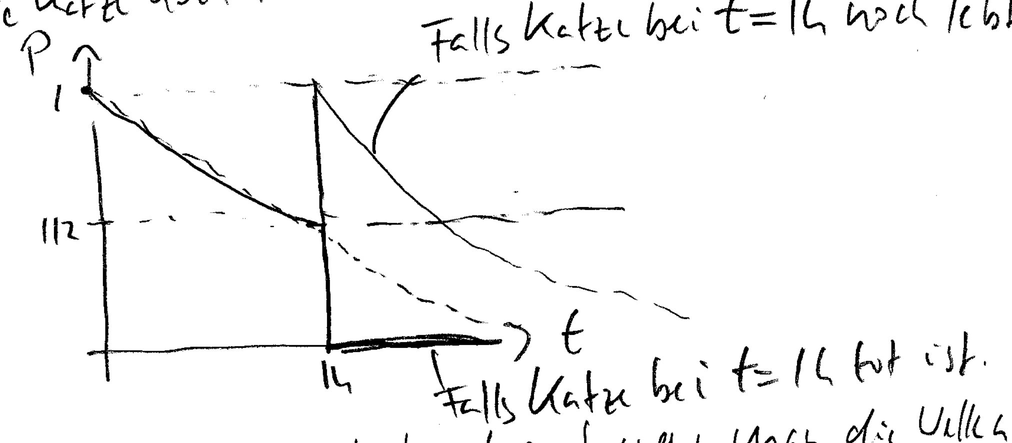
bei $t=0$: $|\text{Atomkern, lebende Katze}\rangle$

Für t gilt

$$|\psi\rangle = \exp(-\lambda t)\,|\text{Atomkern; lebendige Katze}\rangle$$

$$[1-\exp(-\lambda t)]\,|\text{zerfallener Atomkern; tote Katze}\rangle$$

Die Katze ist also weder tot noch lebendig, sondern in einem Überlagerungszustand zwischen „lebendig" und „tot"!! Bis ein Beobachter den Kasten öffnet. Dann ist die WSK wieder 1 falls die Katze noch lebt oder 0 falls sie tot ist. Es ist also



Scheinbares Paradoxon löst sich auf, wenn man die Wellenfunktion nicht der einzelnen Katze zuordnet, sondern nur einem Ensemble immer gleich präparierter Anordnungen.

Zeitabhängigkeit von Erwartungswerten

$$\langle \hat{O} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\; \psi^*(\vec{x},t)\, \hat{O}\, \psi(\vec{x},t)$$

$$\psi(\vec{x},t) = \sum_n c_n u_n(\vec{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) \quad \text{(s.o.)}$$

$$= \sum_n \underbrace{\int d^3\vec{x}\,'\, u_n^*(\vec{x}\,')\, \psi(\vec{x}\,', 0)}_{c_n} u_n(\vec{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right)$$

$$= \int d^3\vec{x}\,' \underbrace{\sum_n u_n^*(\vec{x}\,')\, u_n(\vec{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right)}\, \psi(\vec{x}\,', t=0)$$

$$= \int d^3\vec{x}\,'\; G(\vec{x},t; \vec{x}\,', t=0)\, \psi(\vec{x}\,', t=0)$$

$G(\vec{x},t; \vec{x}\,', t=0)$: Propagator oder Greensche Funktion der Schrödingergleichung.

$$\langle \hat{O} \rangle = \int d^3\vec{x}\; \psi^*(\vec{x},t)\, \hat{O}\, \psi(\vec{x},t)$$

$$\hat{O} = \hat{O}(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}}, t)$$

t: explizite Zeitabhängigkeit

$\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}}$ zeitunabhängig ("Schrödingerbild der Zeitentwicklung": Allgemeinere Bilder kommen später)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle \hat{O} \rangle = \int d^3\vec{x}\, \Big[\big(\partial_t \psi^*(\vec{x},t)\big)\, \hat{O}\, \psi(\vec{x},t) + \psi^*(\vec{x},t)\, (\partial_t \hat{O})\, \psi(\vec{x},t) + \psi^*(\vec{x},t)\, \hat{O}\, \partial_t \psi(\vec{x},t) \Big]$$

Schrödingergleichung

$$i\hbar\, \partial_t \psi(x,t) = \hat{H}\, \psi(x,t) \qquad \hat{H} \text{ hermitesch}$$

$$\Rightarrow -i\hbar\, \partial_t \psi^*(x,t) = \hat{H}^+ \psi^*(x,t) \overset{\downarrow}{=} \hat{H}\, \psi^*(x,t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle \hat{O} \rangle = \int d^3\vec{x}\, \Big[\frac{i}{\hbar}\big(\hat{H}\, \psi^*(\vec{x},t)\big)\, \hat{O}\, \psi(\vec{x},t) + \psi^*(\vec{x},t)\, (\partial_t \hat{O})\, \psi(\vec{x},t) - \frac{i}{\hbar}\, \psi^*(\vec{x},t)\, \hat{O}\hat{H}\psi(\vec{x},t) \Big]$$

$$= \int d^3\vec{x}\; \psi^*(\vec{x},t) \Big[\frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{O} - \hat{O}\hat{H}) + (\partial_t \hat{O}) \Big] \cdot \psi(\vec{x},t)$$

$$= \Big\langle \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{O}] + \partial_t \hat{O} \Big\rangle$$

$$= \Big\langle \frac{1}{i\hbar}[\hat{O}, \hat{H}] + \partial_t \hat{O} \Big\rangle$$

Ist also $\hat{O}$ der Operator, der der Observablen O zugeordnet ist, dann ist es sinnvoll der Observablen

$$\dot{O} = \frac{dO}{dt}$$

den Operator

$$\mathring{\hat{O}} := \frac{1}{i\hbar}[\hat{O}, \hat{H}] + \partial_t \hat{O}$$

zuzuordnen.

ACHTUNG! $\mathring{\hat{O}}$ ist i.a. $\neq \frac{d\hat{O}}{dt}$!

Es gilt also

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{O}\rangle = \langle\mathring{\hat{O}}\rangle = \left\langle \frac{1}{i\hbar}[\hat{O}, \hat{H}] + \frac{\partial\hat{O}}{\partial t}\right\rangle$$

für jeden Zustand $\psi(x, t)$. Heisenbergsche Bewegungsgl. für Erwartungswerte.

Falls $\hat{O} = \hat{O}(\vec{x}, \vec{p})$ nicht expl. zeitabhängig und

$$\psi(x, t) = u_n(\vec{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right)$$

ein stationärer Zustand ist, folgt

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{O}\rangle = \int d^3\vec{x}\, \psi^*(\vec{x}, t) \left\{\frac{1}{i\hbar}[\hat{O}, \hat{H}]\right\} \psi(\vec{x}, t)$$

$$= \int d^3\vec{x}\, u_n^*(\vec{x}) \cancel{\exp\left(+\frac{i}{\hbar}E_n t\right)} \left\{\frac{1}{i\hbar}[\hat{O}, \hat{H}]\right\} u_n(\vec{x}) \cancel{\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right)}$$

$$= \int d^3\vec{x}\, u_n^*(\vec{x}) \frac{1}{i\hbar}\left(\hat{O}\hat{H} - \hat{H}\hat{O}\right) u_n(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle \hat{O} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \Big\{ \psi_n^*(\vec{x}) \frac{1}{i\hbar} \hat{O} \underbrace{\hat{H} \psi_n(\vec{x})}_{E_n \psi_n(\vec{x})}$$

$$- \frac{1}{i\hbar} \Big[\underbrace{\hat{H} \psi_n(\vec{x})}_{E_n \psi_n(\vec{x})} \Big]^* \hat{O} \psi_n(\vec{x}) \Big\}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \frac{1}{i\hbar} \Big[\psi_n^*(\vec{x}) \hat{O} E_n \psi_n(\vec{x}) - \psi_n^*(\vec{x}) E_n \hat{O} \psi_n(\vec{x}) \Big]$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ Falls $\partial_t \hat{O} = 0$ und $\psi(x,t)$ stationärer Zustand, dann sind Erwartungswerte zeitunabhängig.

Da dann auch die EVn $\varphi_0(\vec{x})$ nicht zeitabhängig sind gilt dann für die Wsk, den EW 0 zu messen

$$P_0(t) = |\langle \varphi_0 | \psi \rangle|^2$$

$$= \Big| \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \, \varphi_0^*(\vec{x}) \psi_n(\vec{x}) \exp\Big(-\frac{i}{\hbar} E_n t\Big) \Big|^2$$

$$= \Big| \exp\Big(-\frac{i}{\hbar} E_n t\Big) \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \, \varphi_0^*(\vec{x}) \psi_n(\vec{x}) \Big|^2$$

$$= \Big| \exp\Big(-\frac{i}{\hbar} E_n t\Big) \Big|^2 \Big| \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \, \varphi_0^*(\vec{x}) \psi_n(\vec{x}) \Big|^2$$

$$= \Big| \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \, \varphi_0^*(\vec{x}) \psi_n(\vec{x}) \Big|^2 = \underline{\underline{0}}$$

Falls $\hat{O} = \hat{O}(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}})$ expl. zeitunabh. ist und mit $\hat{H}$ vertauscht, (12)
gilt:

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{O} \rangle = \left\langle \frac{i}{i\hbar} [\hat{O}, \hat{H}] \right\rangle = 0$$

für alle Zustände $\psi(x,t)$. Dann repräsentiert $\hat{O}$ eine Erhaltungsgröße. Man sagt auch $\hat{O}$ sei ein Integral der qm. Bewegungsgln.