Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Blatt 9 (13.01.-17.01.2014)

Präsenzübungen

(P22) Gravitationspotential radialsymmetrischer Masseverteilungen

In der Vorlesung wurde für das Gravitationspotential die Formel

$$\Phi(\vec{r}) = -\gamma \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{1}$$

hergeleitet. Dabei ist $\rho(\vec{r}\,')$ die Massenverteilung der Materie, die das Gravitationspotential erzeugt.

(a) Zeigen Sie, daß für eine um den Ursprung symmetrische Massenverteilung

$$\rho(\vec{r}\,') = \rho(r') \quad \text{mit} \quad r' = |\vec{r}\,'|$$

auch das Gravitationspotential radialsymmetrisch ist, d.h. daß

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(r) \quad \text{mit} \quad r = |\vec{r}|$$

gilt.

(b) Berechnen Sie das Gravitationspotential mit Hilfe von (1).

Tip: Sie können aufgrund der Rotationssymmetrie den Aufpunkt $\vec{r}$ auf die z-Achse legen (also $\vec{r} = z\vec{e}_z$ setzen) und dann das Volumenintegral vereinfachen, indem Sie für die Integrationsvariablen $\vec{r}\,'$ Kugelkoordinaten $(r', \vartheta', \varphi')$ einführen und die Integrationen über die Winkel ϑ' und φ' ausführen.

(c) Zeigen Sie, daß in diesem Fall die Kraft auf eine Punktmasse, die sich in diesem Gravitationspotential bewegt, der Kraft entspricht, die eine im Ursprung konzentrierte Masse $M(r)$ hervorruft, wobei $M(r)$ die Gesamtmasse innerhalb der Kugel vom Radius r (Abstand der Punktmasse vom Zentrum) entspricht. D.h. es gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\gamma m M(r)}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{mit} \quad M(r) = 4\pi \int_0^r \mathrm{d}r' r'^2 \rho(r').$$

(d) Betrachten Sie eine homogene Kugel als gravitationserzeugende Masse vom Radius R (Gesamtmasse M), also

$$\rho(r') = \begin{cases} \frac{3M}{4\pi R^3} & \text{für} \quad r' \leq R, \\ 0 & \text{für} \quad r' > R \end{cases}$$

und geben Sie das entsprechende Gravitationspotential an.

(e) Es sei nun entlang der z-Achse ein sehr dünner Tunnel (vernachlässigbarer Masse) durch den Mittelpunkt dieser Kugel gebohrt, in dem sich ein Massenpunkt m reibungsfrei bewegen kann. Wie lautet die Bewegungsgleichung für diesen Massenpunkt im Inneren der Kugel.

(f) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingung $z(0) = R$, $v(0) = \dot{z}(0) = 0$.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!