Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Blatt 11 (27.01.-31.01.2014)

Präsenzübungen

(P26) Streuung eines Elektrons an einem Kern

Wir betrachten die Streuung eines Elektrons an einem Atomkern. Dabei dürfen wir annehmen, daß der Atomkern wegen seiner gegenüber dem Elektron sehr viel größeren Masse in einem festen Punkt F_1 fixiert ist. Die Kraft ist für nicht zu große Annäherung an den Kern durch die elektrostatische Coulomb-Kraft

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^3}\vec{r}, \quad K = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \tag{1}$$

gegeben. Dabei ist e die (positive) Elementarladung, d.h. die Elektronenladung beträgt $q_{\text{e}} = -e$ und Z die Anzahl der Protonen im Atomkern, so daß die Kernladung $q_{\text{Kern}} = Ze$ beträgt, und r ist der Abstand des Elektrons vom Kern. Die Konstante ϵ_0, die sog. Permittivität des Vakuums, ist eine die Ladungseinheit Coulomb (im Internationalen Einheitensystem) definierende Konstante.

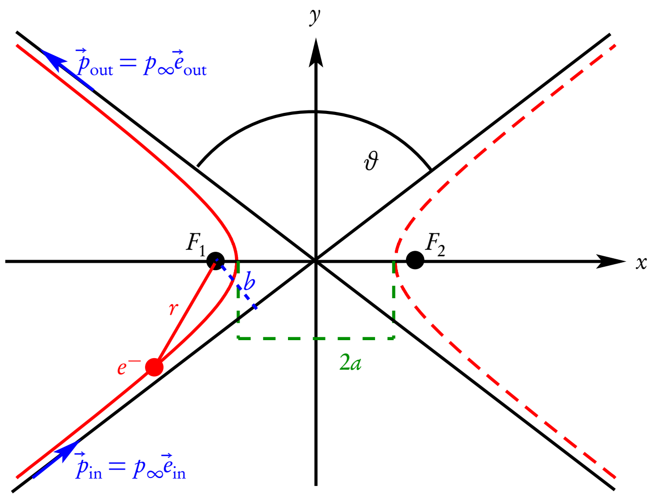

Abbildung 1: Hyperbel bei der Elektron-Kernstreuung. Der Kern sitzt fest im Brennpunkt F_1 der Hyperbel. Deren Gleichung lautet im eingezeichneten Koordinatensystem $x^2/a^2 - y^2/\tilde{b}^2 = 1$, wobei die „imaginäre Halbachse“ durch $\tilde{b} = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\epsilon^2 - 1)} = a\sqrt{\epsilon^2 - 1}$ gegeben ist.

Das Elektron fällt aus dem Unendlichen mit der kinetischen Energie $E = p_\infty^2/(2m_{\text{e}}) > 0$ ein. Aus der Vorlesung wissen wir, daß sich das Elektron auf einer Hyperbelbahn mit den Bahnparametern

$$k = \frac{2m_{\text{e}}K}{\ell^2}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m_{\text{e}}K^2}} \tag{2}$$

bewegt, wobei der Kern im Brennpunkt F_1 der Hyperbel sitzt. Dabei ist ℓ der Betrag des Bahndrehimpulses des Elektrons. Wir legen die Bahnebene (die **Streuebene**) in die xy-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems, wie in der Abbildung gezeigt.

Nun kann man bei Streuexperimenten gewöhnlich nicht einzelne Elektronen betrachten, sondern nur einen Strom von Elektronen, die weit weg von dem streuenden Kern mit einer gut definierten Energie E eingeschossen werden. Die Stromdichte j_0 ist dabei durch die Anzahl der Elektronen, die pro Zeiteinheit durch ein infinitesimales Flächenstückchen senkrecht zu $\vec{p}_{\text{in}}$ fliegen (Teilchenzahlstromdichte der einlaufenden Teilchen), definiert. Der **Stoßparameter** b ist dabei relativ unbestimmt.

Um die Streuung der Elektronen an dem Atomkern quantitativ zu charakterisieren, verwenden die Teilchenphysiker den sog. **differentiellen Streuquerschnitt**. Dazu stellen sie einen Detektor weit weg vom Kern in einem Winkel ϑ relativ zur Richtung der einfallenden Elektronen $\vec{p}_{\text{in}}$ auf und zählen die Anzahl dn der Elektronen, die pro Zeiteinheit in einem Winkel zwischen ϑ und $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$ gemessen werden, wobei dϑ durch die Größe der Detektoröffnung bestimmt ist. Der Streuquerschnitt ist dann durch

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{1}{j_0}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{1}{j_0} 2\pi b \left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\vartheta}\right| j_0 = 2\pi b \left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\vartheta}\right| \tag{3}$$

definiert. In der folgenden Aufgabe wollen wir diesen differentiellen Streuquerschnitt für den Fall der Coulomb-Streuung als Funktion der Energie und des Streuwinkels berechnen:

(a) Zeigen Sie, daß der Betrag des Bahndrehimpulses durch

$$\ell = b\, p_\infty = b\sqrt{2 m_{\mathrm{e}} E} \tag{4}$$

gegeben ist, indem Sie die Situation zur „Anfangszeit" $t \to -\infty$ betrachten. Dabei ist b der Stoßparameter (s. Abbildung) (nicht zu verwechseln mit der imaginären Halbachse der Hyperbel, die wir in der Erklärung zur Abbildung mit $\tilde{b}$ bezeichnet haben!).

(b) Wie lauten die Gleichungen der Asymptoten in dem eingezeichneten Koordinatensystem?

(c) Berechnen Sie daraus den Zusammenhang zwischen Streuwinkel ϑ und Stoßparameter b.

(d) Berechnen Sie damit schließlich den differentiellen Streuquerschnitt gemäß der Definition (3).

(e) Drücken Sie dieses Resultat durch den **Raumwinkel** aus, indem Sie den Zusammenhang $\mathrm{d}\Omega = 2\pi \mathrm{d}\vartheta\ \sin\vartheta$ verwenden und auf $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ umrechnen.

Hausübungen (Abgabe: 07.02.2014)

(H23) Relativistische Ladung im homogenen elektrischen Feld (10 Punkte)

Ein elektrisch geladenes Teilchen mit der Ladung q und der Ruhemasse m_0 befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $x = 0$ und sei in Ruhe. Auf das Teilchen wirke eine elektrische Kraft $\vec{F} = qE\vec{e}_x$ mittels eines konstanten elektrischen (Beschleuniger-)Feldes E in x-Richtung.

Die speziell relativistische Bewegungsgleichung in nicht kovarianten Größen lautet

$$m_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = qE\vec{e}_x.$$

Wir suchen die Lösung der Bewegungsgleichung $\vec{x}(t)$.

Anleitung: Setzen Sie dazu den Ansatz $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$ für die Geschwindigkeit in die obige Bewegungsgleichung ein. Zeigen Sie, daß dieser Ansatz mit der Bewegungsgleichung konsistent ist und lösen Sie zunächst die Differentialgleichung für v_x. Integrieren Sie dann die gefundene Lösung $v_x(t) = \dot{x}(t)$ nach der Zeit, um $x(t)$ zu erhalten.

Hierbei ist das Integral

$$\int \mathrm{d}t \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2 t^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{a^2 + b^2 t^2}, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{5}$$

nützlich.