Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2013**

Übungen zur Theoretischen Physik 2 – Blatt 2 (29.04.-03.05.2013)

Präsenzübungen

(P3) Bewegung auf rotierender Ebene

Ein Beobachter befinde sich auf einer Ebene, die relativ zu einem Inertialsystem (x, y) um eine zu ihr senkrechte Achse mit einer beliebigen zeitabhängigen Winkelgeschwindigkeit rotiert.

Wie lautet die Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt auf dieser Ebene aus Sicht des mitrotierenden Beobachters? Dabei wirke (im Inertialsystem) eine beliebige Kraft $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$ in der Ebene auf den Massenpunkt.

Hinweis: Die Herleitung der Bewegungsgleichung läßt sich durch Einführung der komplexen Variablen $u = x + \mathrm{i}y$ (Koordinaten im Inertialsystem) und $u' = x' + \mathrm{i}y'$ vereinfachen. Zeigen Sie dazu zunächst, daß damit die Rotation durch

$$u = u' \exp(\mathrm{i}\varphi)$$

beschrieben werden kann. Dabei ist $\varphi = \varphi(t)$ der beliebig zeitabhängige Rotationswinkel zwischen den Basisvektoren $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ und $(\vec{e}'_x, \vec{e}'_y)$. Ebenso kann man die Komponenten der Kraft in den jeweiligen Bezugssystemen zu den komplexen Variablen $\Phi = F_x + \mathrm{i}F_y$ und $\Phi' = F'_x + \mathrm{i}F'_y$ zusammenfassen. Schreiben Sie zum Schluß die Bewegungsgleichung im rotierenden Bezugssystem auch in der Form mit reellen Vektoren.

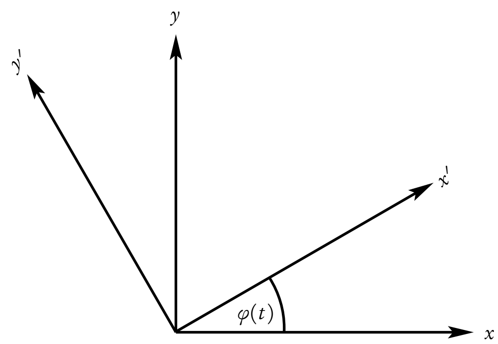

Abbildung 1: Zu Aufgabe (P2): Die kartesischen Koordinatensysteme in der Ebene: das xy-System ruht in einem Inertialsystem, und das $x'y'$-System rotiert gegenüber diesem Inertialsystem um den Ursprung dieser Koordinaten. Der Drehwinkel φ zwischen den Bezugssystemen ist dabei eine beliebige Funktion der Zeit.

(bitte wenden)!

Hausübungen (Abgabe am 10.05.2013)

(H3) Zum Foucault-Pendel

In der Vorlesung wurde die Bewegung eines Foucault-Pendels auf der rotierenden Erde am Breitengrad $\varphi = \pi/2 - \lambda$ hergeleitet. Für kleine Schwingungen und unter Vernachlässigung der Zentrifugalkraft gilt für die Projektion der Bewegung auf die $x'y'$-Ebene ((x', y', z'): erdfeste Koordinaten)

$$\begin{aligned} \ddot{x}' &= -\omega_0^2 x' + 2\omega \cos\lambda \, \dot{y}', \\ \ddot{y}' &= -\omega_0^2 y' - 2\omega \cos\lambda \, \dot{x}'. \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei ist $\omega_0^2 = g/l$ die Schwingungsdauer des Pendels der Länge l für kleine Schwingungen ($x', y' \ll l$) im Inertialsystem und $\omega = 2\pi/\text{Tag}$ die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation.

(a) (5 Punkte) Lösen Sie dieses Gleichungssystem ohne weitere Näherungen für beliebige Anfangsbedingungen $x'(0) = x_0'$, $y'(0) = y_0'$, $\dot{x}'(0) = v_{x0}$, $\dot{y}'(0) = v_{y0}$. Dabei empfiehlt sich die Anwendung des Rechentricks in Aufgabe (P3), also die Einführung der komplexen Variable $u' = x' + \mathrm{i} y'$ (s. auch das Lehrbuch von W. Greiner, Bd. 2).

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, daß die Bahnform entscheidend von den gewählten Anfangsbedingungen abhängt, indem Sie als Beispiele zum einen den Fall (i) $x_0 > 0$, $y'(0) = 0$, $v_{x0} = v_{y0} = 0$ und zum anderen den Fall (ii) $x_0 = y_0 = 0$, $v_{x0} > 0$, $v_{y0} = 0$ betrachten. Schematisch sind die entsprechenden Lösungen durch die Rosettenbahnen in der Abbildung unten gezeigt, wobei allerdings ω_0 und ω nicht wie auf der Erde sondern in einem wesentlich anderen Verhältnis zueinander gewählt wurden.

Hinweis: In der Bahnkurve treten Zacken auf, wenn die Geschwindigkeit zu einer Zeit t verschwindet, also wenn $(\dot{x}'(t), \dot{y}'(t)) = 0$ gilt.

(c) (2 Punkte) Wie müssen ω_0 und ω gewählt sein, damit die Bahnen wie in der Abbildung gezeigt geschlossen sind?

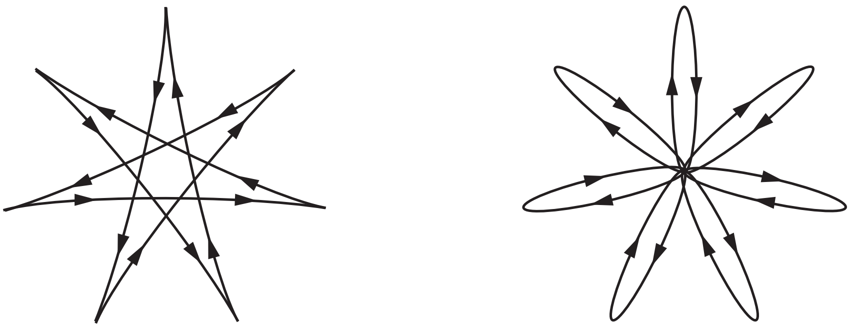

Abbildung 2: Zu Aufgabe H3 (b): Bahnen der Projektion eines Pendels auf der rotierenden Erde für die Anfangebedingungen (i) (links) und (ii) (rechts). Zur Veranschaulichung wurden ω_0 und ω in einem unrealistischen Verhältnis zueinander gewählt (vgl. Aufgabenteil (c)).