Übungen zur Theoretischen Physik 2 – Blatt 5 (20.05.-24.05.2013)

Präsenzübungen

(P8) Energiebetrachtungen zur schwingenden Saite

Eine Saite der Länge l sei mit der Spannung T_0 zwischen zwei Punkten fest eingespannt und zu kleinen Schwingungen angeregt. Die Masse pro Längeneinheit der Saite sei σ.

(a) Wie lauten die Ausdrücke für die gesamte kinetische $T(t)$ und potentielle Energie $V(t)$ der Saite als Funktionen der Zeit, ausgedrückt durch die Auslenkung $u(t,x)$ ($x \in [0,l]$)?

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Wellengleichung, daß die Gesamtenergie erhalten ist.

(c) Drücken Sie die gesamte kinetische und potentielle Energie ($T(t)$ und $V(t)$) mit Hilfe der Fourier-Koeffizienten für die Entwicklung nach Normalschwingungsmoden

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{\pi n c t}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \tag{1}$$

aus[1].

Hinweis: Nutzen Sie bei den benötigten räumlichen Integralen die $2l$-Periodizität der Funktion bzgl. x und die Orthogonalität der Funktionen $\sin(\pi n x/l)$ und $\cos(\pi n x/l)$ im Hilbertraum $L^2([-l,l])$ aus.

Zusatzknobelfrage: Welche mathematische Bedingung muß die Anfangsauslenkung erfüllen, damit die Gesamtenergie $E = T + V = \text{const}$ wohldefiniert ist?

(d) Zeigen Sie, daß die zeitlichen Mittel über kinetische und potentielle Energie gleich sind:

$$\langle T(t)\rangle_t := \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \mathrm{d}t'\, T(t') = \langle V(t)\rangle_t := \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \mathrm{d}t'\, V(t').$$

Dabei bezeichnet $\tau = 2l/c$ die Periodendauer der Grundschwingung.

bitte wenden!

[1] Dies ist der spezielle Fall, daß die Saite zur Zeit $t = 0$ aus der Ruhe losgelassen wird.

Hausübungen (Abgabe am 31.05.2013)

(H8) Rechteckige Trommel (10 Punkte)

Auf einem rechteckigen Rahmen mit Kantenlängen L_1 und L_2 sei ein Trommelfell mit homogener Massenbelegung und Spannung gespannt. Für kleine Auslenkungen läßt sich dann analog wie bei der schwingenden Saite die Wellengleichung in 1+2 Dimensionen herleiten:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial t^2} - \Delta u(t,x,y) = 0.$$

Dabei ist u die transversale Auslenkung des Fells zur Zeit t an der Stelle $(x,y) \in [0,L_1] \times [0,L_2]$ und

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

der zweidimensionale Laplace-Operator.

Bestimmen Sie die Lösungen dieser Wellengleichung unter Berücksichtigung der entsprechenden Anfangs-Randwert-Bedingungen

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \quad \partial_t u(0,x,y) = v_0(x,y), \quad u(t,x,0) = u(t,x,L_2) = u(t,0,y) = u(t,L_1,y) = 0$$

mit Hilfe der Fourierschen Methode. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Normalmoden der schwingenden Membran mit Hilfe des Separationsansatzes der Wellengleichung in der Form

$$u(t,x,y) = T(t)X(x)Y(y),$$

indem Sie alle nichttrivialen Lösungen dieser Form mit den obigen Rand-Bedingungen finden.

Hinweis: Das Resultat dieser Teilaufgabe lautet

$$f_{jk}(x,y) = \sin(k_{1j}x)\sin(k_{2k}y) \quad \text{mit} \quad k_{1j} = \frac{\pi j}{L_1}, \quad k_{2k} = \frac{\pi k}{L_2}, \quad j,k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}.$$

Die dazugehörigen Funktionen für die Zeitabhängigkeit ergeben sich dann zu

$$T_{jk}(t) = A_{jk}\cos(\omega_{jk}t) + B_{jk}\sin(\omega_{jk}t) \quad \text{mit} \quad \omega_{jk} = c\sqrt{k_{1j}^2 + k_{2k}^2}.$$

Dabei sind A_{jk} und B_{jk} Integrationskonstanten, die wir in den folgenden Teilaufgaben bestimmen wollen.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, daß die eben gefundenen Normalmoden $f_{jk}(x,y)$ ein System orthogonaler Funktionen auf dem Hilbertraum $L^2([0,L_1] \times [0,L_2])$ bilden, d.h. daß

$$\int_0^{L_1} \mathrm{d}x \int_0^{L_2} \mathrm{d}y\, f_{j'k'}(x,y) f_{jk}(x,y) = N_{jk}\delta_{j'j}\delta_{k'k}$$

und bestimmen Sie die Normierungsfaktoren N_{jk}.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten für die Entwicklung der allgemeinen Lösung der Wellengleichung nach Normalmoden der Form

$$u(t,x,y) = \sum_{j,k=1}^{\infty} [A_{jk}\cos(\omega_{jk}t) + B_{jk}\sin(\omega_{jk}t)] f_{jk}(x,y)$$

aus den Anfangsbedingungen.