Übungen zur Theoretischen Physik 2 – Blatt 8 (10.06.-14.06.2013)

Präsenzübungen

(P13) Hauptachsentransformation

Zeigen Sie, daß der diagonalisierte Trägheitstensor der Anordnung in (P12) von Blatt 7 wie folgt transformiert wird:

$$\hat{I}_{\text{diag}} = \hat{A}\hat{I}\hat{A}^{-1}.$$

Dabei ist $\hat{A}$ die Transformationsmatrix gebildet durch

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3 \end{pmatrix}$$

wobei $\vec{n}_i$ die normierten Eigenvektoren, geschrieben als Zeilentripel, aus der Eigenwertgleichung $\hat{I}\,\vec{n} = I\vec{n}$ sind.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß $\hat{A}$ orthogonal ist, d.h., $\hat{A}^{-1} = \hat{A}^T$.

(P14) Trägheitstensor eines Würfels um den Schwerpunkt

Berechnen Sie den Trägheitstensors des homogenen Würfels $[-a/2, a/2] \times [-a/2, a/2] \times [-a/2, a/2]$ der Masse m um den Schwerpunkt $x = y = z = 0$. Welche Art von Kreisel (unsymmetrisch, symmetrisch oder Kugelkreisel?) liegt bei der freien Rotation des Würfels demnach vor?

bitte wenden!

Hausübungen (Abgabe am 21.06.2013)

(H11) Hauptachsentransformation (3 Punkte)

Zeigen Sie allgemein, daß ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe $\hat{I}$ im $\mathbb{R}^3$ durch die Transformation $\hat{I}' = \hat{A}\hat{I}\hat{A}^{-1}$ diagonalisiert wird, wenn

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3 \end{pmatrix},$$

wobei $\vec{n}_i$ Zeilenvektoren darstellen und die normierten Eigenvektoren von $\hat{I}$ sind.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß $\hat{A}$ orthogonal ist, d.h., $\hat{A}^{-1} = \hat{A}^T$.

(H12) Trägheitstensor eines Zylinders

Berechnen Sie den Trägheitstensor eines homogenen Zylinders der Masse m mit Radius R und Höhe h um seinen Schwerpunkt.

Gehen Sie dazu wie folgt vor

(a) (2 Punkte) Führen Sie Zylinderkoordinaten ein

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, daß der Zylinder durch die Bereiche $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $z \in [-h/2, h/2]$ definiert ist und daß das Volumenelement in Zylinderkoordinaten durch $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,r$ gegeben ist.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß der Schwerpunkt durch den Ursprung dieses Koordinatensystems, also $x = y = z = 0$, gegeben ist.

(c) (3 Punkte) Berechnen Sie den Trägheitstensor direkt aus dessen Definition

$$\hat{T} = \int_V \mathrm{d}^3\vec{r}\,\rho(\vec{r}) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}.$$

Rechnen Sie dabei in den oben eingeführten Zylinderkoordinaten.