Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees Sommersemester 2013

Übungen zur Theoretischen Physik 2 – Blatt 12 (08.07.-12.07.2013)

Präsenzübungen

(P21) Massenpunkt in Kegel

Ein Punkt der Masse m werde auf die Innenfläche eines Kegels in der Höhe z_0 abgelegt und tangential angestoßen. Der Öffnungswinkel des Kegels sei α, und die ganze Anordnung befinde sich im homogenen Schwerefeld der Erde mit der Kegelachse in Richtung der Schwerkraft.

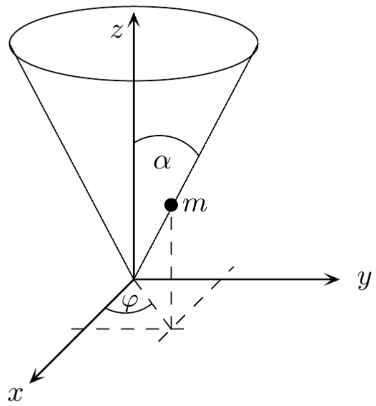
(a) Geben Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie V und die Lagrange-Funktion $L = T - V$ in Abhängigkeit von der Höhe z und des Winkels φ an.

(b) Wie lauten die generalisierten Impulse des Systems? Welche generalisierte Koordinate ist zyklisch? Welche Erhaltungsgröße ist damit verbunden?

(c) Berechnen Sie nun mit dem Lagrange-Formalismus die Bewegungsgleichungen des Systems.

(d) Zeigen Sie, daß sich die Kugel in einem effektiven Potential der Form $V_{\text{eff}}(z) = \frac{A}{z^2} + Bz + C$ mit $A, B, C = \text{const}$ bewegt.

(e) Wann kann das Teilchen in die Spitze des Kegels bei $z = 0$ fallen?



(P22) Variationsrechnung

(a) Zeigen Sie, daß der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf der Mantelfläche eines Kreiszylinders durch eine Helix gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, daß der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf einer Kugel ein Großkreis ist.

Hinweis: Parametrisieren Sie die Kurve in sphärischen Koordinaten (ϑ, φ) und legen Sie dabei das Koordinatensystem o.B.d.A. so, daß die beiden vorgegebenen Punkte auf demselben Längengrad φ_0 liegen.

bitte wenden!

(Freiwillige) Hausübungen (Abgabe am 19.07.2013)

(H20) Beispiel zum Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung
Gegeben sei die Lagrangefunktion zur Beschreibung des freien Falls

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - mgx.$$

(a) (3 Punkte) Die Bewegung $x(t)$ sei durch folgenden Parametersatz

$$x(t) = at^2 + bt + c$$

parametrisiert und genüge den Randbedingungen

$$x(t_0 = 0) = 0, \quad x(t_1 = 1\,\mathrm{s}) = x_0.$$

Berechnen Sie die Wirkung $S[x] = \int_0^{1\,\mathrm{s}} L(x, \dot{x})\mathrm{d}t$ mit dem Potenzansatz für $x(t)$ mit den gewünschten Randbedingungen.

(b) (2 Punkte) Untersuchen Sie, für welche Parameter a, b, c die berechnete Wirkung aus (a) minimal ist. Erkennen Sie das Ergebnis? Versuchen Sie, das Variationsprinzip am Beispiel des Potenzansatzes graphisch zu deuten.

(H21) Minimale Rotationsfläche (5 Punkte)
Wir betrachten die Kurven $y = y(x)$ mit $y(x) > 0$ in der xy-Ebene, die zwei Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) verbinden. Durch Rotation einer solchen Kurve um die x-Achse entsteht eine Rotationsfläche. Wie müssen Sie die Kurve wählen, damit der Flächeninhalt der Rotationsfläche minimal wird?
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß der Flächeninhalt durch das Funktional

$$S[y] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x\, y\sqrt{1 + y'^2}$$

gegeben ist.

Hinweis: Die Lösung dieser Hausübungen ist freiwillig. Wir wollten Ihnen Gelegenheit geben, den Umgang mit Lagrange-Gleichungen und Variationsprinzipien einzuüben.

Insgesamt wird es für die Hausübungen maximal 100 Punkte geben. Wir ersetzen ggf. das schlechteste in einer Hausübung erreichte Ergebnis durch die mit dieser Übung erzielte Punktzahl, falls diese höher ausfällt.