Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2014**

Übungen zur Theoretischen Physik 2 – Blatt 6 (26.05.-30.05.2014)

Übung zur Abgabe am 30.05.2014

Aufgabe 19: Ebene-Wellen-Lösung der 1+3-dimensionalen Wellengleichung (Kategorie A)
Zeigen Sie, daß die Funktion $u(t,\vec{r}) = f(\vec{n}\cdot\vec{r} - ct)$ die Wellengleichung

$$\Delta u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

löst, wobei f eine beliebige stetig und zweifach differenzierbare Funktion ist, und

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ist der Laplace-Operator. Ferner ist $\vec{n} = \text{const}$ der Einheitsvektor, der in die Ausbreitungsrichtung der Welle zeigt.

Aufgabe 20: Fouriersche Methode zur Lösung der Wellengleichung (Kategorie A)
Eine Saite, die zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = l$ eingespannt ist, wird zur Zeit $t = 0$ so ausgelenkt, daß ihre Form durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 < x < l/2, \\ l - x & \text{für} \quad l/2 < x < l. \end{cases}$$

gegeben ist und wird sodann aus der Ruhe losgelassen.
Lösen Sie das Problem, indem Sie für die Amplitude von $u(t,x)$ eine Fourierentwicklung ansetzen. Zeichnen Sie die Näherungslösung, die durch z.B. die ersten 10 nichtverschwindenden Terme der Fourierreihe gegeben ist, zu den Zeiten $t = 0$, $\frac{1}{8}T$, $\frac{1}{4}T$, $\frac{3}{8}T$ und $t = \frac{1}{2}T$. Dabei sei T die Periodendauer der Schwingung.
Hinweis: Wie wir in Aufgabe 21 zeigen werden, benötigen wir die ungerade periodische Fortsetzung der Anfangsbedingung, d.h. wir suchen deren Darstellung in Form einer reinen Fourier-Sinusreihe:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin\left(\frac{j\pi}{l}x\right).$$

Weitere Übungsaufgaben

Aufgabe 21: Allgemeine Lösung der 1+1-dimensionalen Wellengleichung (Kategorie B)
Wir betrachten die Wellengleichung der schwingenden Saite

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0. \tag{1}$$

Dabei ist $u(t,x)$ die Auslenkung der entlang der x-Achse gespannten Saite von ihrer Ruhelage. Die Länge der Saite sei l ($x \in [0,l]$). Wir suchen also für die Wellengleichung die allgemeine Lösung, die

die folgenden Anfangs-Randwert-Bedingungen lösen:

$$u(t, x=0) = u(t, x=l) = 0, \tag{2}$$

$$u(t=0, x) = f(x), \quad \partial_t u(t=0, x) = g(x), \quad x \in [0, l]. \tag{3}$$

Dabei müssen f und g verträglich mit den Randbedingungen sein, d.h. es muß gelten $f(0) = f(l) = 0$ und $g(0) = g(l) = 0$.

(a) führen Sie die neuen unabhängigen Variablen $q_1 = ct - x$ und $q_2 = ct + x$ ein und zeigen Sie, daß die Wellengleichung zu der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} u = 0 \tag{4}$$

wird.

(b) Wie lautet die allgmeine Lösung dieser Gleichung?

(c) Bestimmen Sie die freien Funktionen in der Lösung (4) aus den Anfangs-Randwert-Bedingungen (2) und (3).

(d) Schränken diese Anfangs-Randbedingungen die Lösung der Wellengleichung vollständig ein, d.h. wird durch sie die Lösung eindeutig bestimmt?

Aufgabe 22: Fourier-Methode zur Lösung der Wellengleichung (Kategorie A)
Wiederholen Sie die Aufgabe 20 mit der Anfangsbedingung

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 < x < l/3, \\ (l-x)/2 & \text{für} \quad l/3 < x < l. \end{cases}$$

Diskutieren Sie die im Vergleich zu Aufgabe 20 verschiedene Anregung der Grund- und Oberschwingungen der Saite.

Bermerkung: Die Anfangsbedingungen von Aufgabe 20 und dieser Aufgabe sind eine recht gute Beschreibung für die Schwingung einer Gitarrensaite, die entsprechend angezupft wird.