Übungen zur Theoretischen Physik 2 – Blatt 8 (16.06.-20.06.2014)

Übungen zur Abgabe am 13.06.2014

Aufgabe 28: Trägheitstensor eines Würfels um den Schwerpunkt (Kategorie A)

Berechnen Sie den Trägheitstensor des homogenen Würfels $[-a/2, a/2] \times [-a/2, a/2] \times [-a/2, a/2]$ der Masse m um den Schwerpunkt $x = y = z = 0$. Welche Art von Kreisel (unsymmetrisch, symmetrisch oder Kugelkreisel?) liegt bei der freien Rotation des Würfels demnach vor?

Aufgabe 29: Trägheitstensor eines Zylinders (Kategorie A)

Berechnen Sie den Trägheitstensor eines homogenen Zylinders der Masse m mit Radius R und Höhe h um seinen Schwerpunkt. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Führen Sie Zylinderkoordinaten ein

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, daß der Zylinder durch die Bereiche $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $z \in [-h/2, h/2]$ definiert ist und daß das Volumenelement in Zylinderkoordinaten durch $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}z\ r$ gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, daß der Schwerpunkt durch den Ursprung dieses Koordinatensystems, also $x = y = z = 0$, gegeben ist.

(c) Berechnen Sie den Trägheitstensor direkt aus dessen Definition

$$\hat{T} = \int_V \mathrm{d}^3\vec{r}\ \rho(\vec{r}) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}.$$

Rechnen Sie dabei in den oben eingeführten Zylinderkoordinaten.

Weitere Übungsaufgaben

Aufgabe 30: Trägheitstensor einer quadratischen Platte (Kategorie B)

(a) Berechnen Sie den Trägheitstensor für eine homogen mit Masse belegte Platte mit vernachlässigbarer Dicke bzgl. eines seiner Eckpunkte. Die Platte liege in der xy-Ebene mit der linken unteren Ecke im Ursprung: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $z = 0$.

(b) Finden Sie die Hauptträgheitsmomente und Hauptträgheitsachsen.

(c) Zeigen Sie explizit, daß die Hauptachsentransformation durch eine Drehmatrix $\hat{A}$ beschrieben wird. Was ist die entsprechende Drehachse und um welchen Winkel wird gedreht?

Aufgabe 31: Nutation der Erde (Kategorie B)
Die Erde ist kein Kugelkreisel, sondern ein abgeplattetes Rotationsellipsoid. Die Halbachsen sind $a = b = 6378$ km (Äquator) und $c = 6357$ km. Auf die Erde wirke kein äußeres Drehmoment.

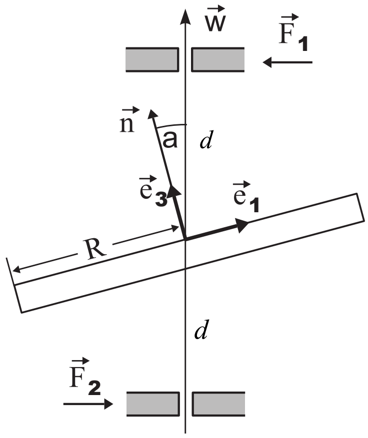
(a) Rekapitulieren Sie mittels der Eulerschen Kreiselgleichungen die Bewegung eines freien, symmetrischen Kreisels. Wie berechnet sich die sogenannte Nutationsfrequenz? Was bedeutet Nutation?

(b) Die Hauptträgheitsmomente eines homogenen Ellipsoides lauten

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{M}{5}(b^2 + c^2), \quad \Theta_3 = \frac{M}{5}(a^2 + b^2),$$

wobei M die Masse des Ellipsoiden (Erde) bezeichnet. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde? Berechen Sie nun die Nutationsfrequenz? Experimetell findet man für die Periode 433 Tage. Woher mag die Abweichung zu Ihrem berechneten Wert rühren?

Aufgabe 32: Rotierende Kreisscheibe und Lagerkräfte (Kategorie B)
Eine homogene Kreisscheibe (Masse M, Radius R) dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine durch den Mittelpunkt verlaufende, körperfeste Achse. Die Achse bilde mit der Flächennormalen den Winkel α und sei auf beiden Seiten des Scheibenmittelpunktes im Abstand d gelagert. Bestimmen Sie die auftretenden Momente und die Kräfte in den Lagern.



Aufgabe 33: Hauptachsen und Symmetrien (Kategorie C)
Aufgabe: Ein starrer Körper besitze eine n-fache Drehsymmetrie ($n > 1$).

(a) Zeigen Sie, daß die Symmetrieachse zugleich Hauptträgheitsachse ist.

(b) Zeigen Sie, daß im Falle $n \geq 3$ die beiden anderen Hauptachsen in der Ebene senkrecht zur ersten frei gewählt werden können.

(c) Bestätigen Sie die Behauptungen von (a) und (b) bei der Anordnung von Aufgabe 25 auf Blatt 7, wenn die Massen m und M gleich sind.
