Übungen zur Theoretischen Physik 2 – Blatt 12 (14.07.-18.07.2014)

Hinweis: Die Aufgaben auf diesem Blatt müssen nicht abgegeben werden!

Aufgabe 47: Massenpunkt in Kegel (Kategorie A)
Ein Punkt der Masse m werde auf die Innenfläche eines Kegels in der Höhe z_0 abgelegt und tangential angestoßen. Der Öffnungswinkel des Kegels sei α, und die ganze Anordnung befinde sich im homogenen Schwerefeld der Erde mit der Kegelachse in Richtung der Schwerkraft.

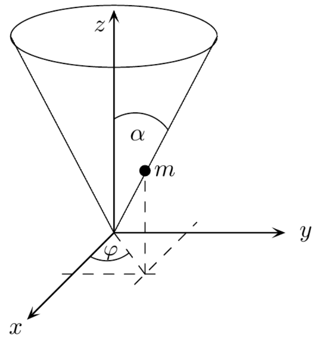
(a) Geben Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie V und die Lagrange-Funktion $L = T - V$ in Abhängigkeit von der Höhe z und des Winkels φ an.

(b) Wie lauten die generalisierten Impulse des Systems? Welche generalisierte Koordinate ist zyklisch? Welche Erhaltungsgröße ist damit verbunden?

(c) Berechnen Sie nun mit dem Lagrange-Formalismus die Bewegungsgleichungen des Systems.

(d) Zeigen Sie, daß sich die Kugel in einem effektiven Potential der Form $V_{\text{eff}}(z) = \frac{A}{z^2} + Bz + C$ mit $A, B, C =$ const bewegt.

(e) Wann kann das Teilchen in die Spitze des Kegels bei $z = 0$ fallen?



Aufgabe 48: Minimale Rotationsfläche (Kategorie B)
Wir betrachten die Kurven $y = y(x)$ mit $y(x) > 0$ in der xy-Ebene, die zwei Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) verbinden. Durch Rotation einer solchen Kurve um die x-Achse entsteht eine Rotationsfläche. Wie müssen Sie die Kurve wählen, damit der Flächeninhalt der Rotationsfläche minimal wird?
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß der Flächeninhalt durch das Funktional

$$S[y] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x \, y \sqrt{1 + y'^2}$$

gegeben ist.

Aufgabe 49: Schneller schwerer symmetrischer Kreisel (Kategorie B)
Wir betrachten den schnellen schweren symmetrischen Kreisel mit den Hauptträgheitsmomenten $\Theta_1 = \Theta_2 = A$ und $\Theta_3 = C \neq A$ mit Hilfe des Lagrange-Formalismusses. Wie in der Vorlesung hergeleitet wurde, lautet die kinetische Energie, ausgedrückt in Euler-Winkeln

$$T = \frac{A}{2}(\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma})^2,$$

wobei der körperfeste Basisvektor $\vec{e}\,'_3$ entlang der Symmetrieachse (Figurenachse) des Kreisels liegt. Der Schwerpunkt liegt auf der Figurenachse im Abstand s vom Drehpunkt des Kreisels: $\vec{R}_s = s\vec{e}\,'_3$. Das homogene Schwerefeld der Erde weise in die negative z-Richtung im raumfesten Bezugssystem: $\vec{g} = -g\vec{e}_3$.

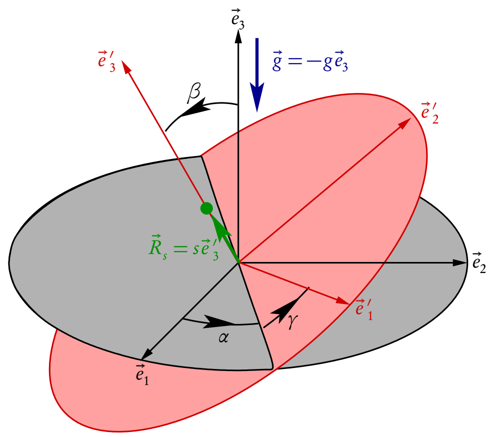


Abbildung 1: Die Euler-Winkel zur Beschreibung der Lage des Kreisels im homogenen Schwerefeld der Erde.

(a) Leiten Sie die potentielle Energie aufgrund der Wirkung der Schwerkraft auf den starren Körper als Funktion der Euler-Winkel her.

(b) Wie lautet demnach die Lagrangefunktion? Welche Koordinaten sind zyklisch und warum? Welche Erhaltungsgrößen ergeben sich daraus?

(c) Begründen Sie aus dem Lagrange-Formalismus, warum die Gesamtenergie erhalten ist und stellen Sie die Energie als Funktion der erhaltenen kanonischen Impulse sowie des Winkels β und seiner Zeitableitung $\dot{\beta}$ dar.

(d) Der Kreisel werde zur Anfangszeit $t = 0$ in schnelle Rotation um die Figurenachse mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 versetzt und dann um den Winkel β_0 gegen die raumfeste z-Achse gekippt in seinem Drehpunkt gelagert. Nehmen Sie nun an, daß $\beta(t) = \beta_0 + \epsilon(t)$ mit $|\epsilon| \ll \omega_0$ ist. Entwickeln Sie den Energieausdruck bis zur quadratischen Ordnung in ϵ und $\dot{\epsilon}$. Leiten Sie aus dem Energiesatz die entsprechend genäherte lineare Bewegungsgleichung her, und lösen sie sie. Unter welchen Voraussetzungen ist die Näherung für alle Zeiten gerechtfertigt, d.h. ist die schnelle Rotation um die Figurenachse stabil? Beschreiben Sie die Bewegung des Kreisels aufgrund Ihrer Lösung vollständig.

Aufgabe 50: Hamiltonsches Prinzip für die schwingende Saite (Kategorie C)

Betrachten Sie eine zwischen zwei Punkten $x = 0$ und $x = a$ englang der x-Achse fest eingespannte Saite mit homogener Massenbelegung λ (Masse pro Länge) und vorgegebener Spannung σ.

(a) Stellen Sie die Ausdrücke für die kinetische und potentielle Energie dieses kontinuierlichen Systems für kleine Auslenkungen der Saite in y-Richtung auf.

(b) Wie lauten die Lagrangefunktion und die Wirkung?

(c) Leiten Sie die Wellengleichung für kleine Transversalschwingungen der Saite um die Ruhelage aus dem Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung her.
