
Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1: Gekoppelte Schwingungen von Massepunkten auf einem Kreis (9 Punkte = 3 + 3 + 3)

Gegeben sei ein System von drei Punktmassen $m_1 = m_2 = m_3 \equiv m$, die in gleichem Abstand auf einem Kreis mit konstantem Radius R ruhen. Diese Punktmassen seien durch drei Federn mit den Federkonstanten $k_1 = k_2 = k_3 \equiv k$ verbunden.

- (i) Fertigen Sie eine Skizze des Systems an, erläutern Sie die wirkenden Kräfte und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen der Massenpunkte.
- (ii) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Ansatzes $x_i(t) = A_i e^{i\omega t}$, $i = 1, 2, 3$, und bestimmen Sie die möglichen Eigenfrequenzen.
- (iii) Diskutieren Sie die möglichen Eigenschwingungen anhand der Eigenfrequenzen aus Aufgabenteil (ii).

Aufgabe 11.2: Konservative Felder und Kurvenintegrale (13 Punkte = 3 + 6 + 2 + 2)

Gegeben seien die Vektorfelder

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \vec{r} &\mapsto (y^2 z^3 - 6xz^2) \vec{e}_x + 2xyz^3 \vec{e}_y + (3xy^2 z^2 - 6x^2 z) \vec{e}_z, \\ \vec{F}_2 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \vec{r} &\mapsto x^2 yz \vec{e}_x - xyz^2 \vec{e}_z, \\ \vec{F}_3 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \vec{r} &\mapsto \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{e}_x + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{e}_y.\end{aligned}$$

- (i) Überprüfen Sie, ob die Vektorfelder \vec{F}_i , $i = 1, 2, 3$, konservativ sind.
- (ii) Berechnen Sie die Kurvenintegrale über die Vektorfelder \vec{F}_1 und \vec{F}_2 entlang beider Wege \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 , wobei die Wege durch
$$\mathcal{C}_1 : (1, 1, 2) \rightarrow (2, 1, 2) \rightarrow (2, 2, 2), \quad \mathcal{C}_2 : (1, 1, 2) \rightarrow (1, 2, 2) \rightarrow (2, 2, 2)$$
gegeben sind und die obigen Punkte jeweils durch gerade Teilstücke verbunden sind.
- (iii) Berechnen Sie das Kurvenintegral über das Vektorfeld \vec{F}_3 entlang eines Kreises um den Ursprung in \mathbb{R}^2 . Was fällt Ihnen auf?
- (iv) Bestimmen Sie die Potentiale für die Vektorfelder \vec{F}_1 und \vec{F}_2 , sofern diese existieren.

Aufgabe 11.3: Newtonsches Gravitationsfeld und Kurvenintegrale (8 Punkte = 3 + 3 + 2)

Gegeben sei das Gravitationsfeld einer Masse m

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r} \mapsto -\frac{Gm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

- (i) Berechnen Sie das Kurvenintegral über das Vektorfeld \vec{F} entlang des Weges \mathcal{C}_1 , wobei der Weg durch

$$\mathcal{C}_1 : (a, 0, a) \rightarrow (3a, 0, a) \rightarrow (3a, 2a, a) \rightarrow (3a, 2a, 2a), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

gegeben ist und die Punkte jeweils durch gerade Teilstücke verbunden sind.

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral über das Vektorfeld \vec{F} entlang des Weges \mathcal{C}_2 , wobei der Weg durch

$$\mathcal{C}_2 : (a, 0, a) \rightarrow (a, 0, 2a) \rightarrow (a, 2a, 2a) \rightarrow (3a, 2a, 2a) , \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} ,$$

gegeben ist und die Punkte jeweils durch gerade Teilstücke verbunden sind.

(iii) Finden Sie ein skalares Feld $\varphi(\vec{r})$, so dass

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) .$$

Hinweis: Die Resultate aus Aufgabe 7.3.(i) könnten sich für Aufgabenteil (iii) als hilfreich erweisen.