
Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1: Bahnkurven (III): Bahnkurve eines Teilchens (11 Punkte = 1.5 + 2 + 4.5 + 3)

Betrachten Sie die Raumkurve \vec{r} , welche durch die folgende Abbildungsvorschrift definiert ist:

$$\vec{r}: \mathbb{R} \supset [t_a = 0, t_e] \rightarrow \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \vec{r}(t) = (r_0 \cosh(kt), r_0 \sinh(kt), r_0 kt),$$

wobei r_0, k positive reelle Konstanten sind.

- (i) Diskutieren Sie den Verlauf der Raumkurve.
- (ii) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$ unter der Bedingung, dass $s(t = 0) = 0$ gelte.
- (iii) Berechnen Sie das begleitende Dreibein $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ als Funktion der Zeit.
- (iv) Berechnen Sie den Krümmungs- und den Torsionsradius als Funktion der Zeit.

Aufgabe 3.2: Raumkurven (IV): Begleitendes Dreibein (9 Punkte = 2 + 1 + 4.5 + 1.5)

Betrachten Sie die Raumkurve \vec{r} , welche durch die folgende Abbildungsvorschrift definiert ist:

$$\vec{r}: \mathbb{R} \supset [t_a = 0, t_e] \rightarrow \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \vec{r}(t) = \left(4t + 5, \frac{\sqrt{8}}{3}t^3, \frac{t^5}{5} - 1 \right).$$

- (i) Berechnen Sie Geschwindigkeit der Raumkurve $\vec{v}(t)$, deren Betrag $|\vec{v}(t)|$, sowie die Beschleunigung der Raumkurve $\vec{a}(t)$ und deren Betrag $|\vec{a}(t)|$.
- (ii) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$.
- (iii) Berechnen Sie das begleitende Dreibein $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ als Funktion der Zeit.
- (iv) Berechnen Sie die Torsion als Funktion der Zeit.

Aufgabe 3.3: $\vec{\nabla}$ -Gymnastik (10 Punkte = 1 + 2 + 3 + 2 + 2)

Seien $\vec{a}, \vec{b}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r} \mapsto \vec{a}(\vec{r}), \vec{b}(\vec{r})$ hinreichend oft differenzierbare Vektorfelder und sei $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{r} \mapsto \phi(\vec{r})$ ein differenzierbares skalares Feld. Beweisen Sie die folgenden Relationen

- (i) $\vec{\nabla} \times (\phi \vec{a}) = \phi \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{\nabla} \phi,$
- (ii) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a},$
- (iii) $\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}),$
- (iv) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}),$
- (v) $\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}).$

Hinweis: Entwickeln Sie sowohl den Nabla-Operator als auch die Vektorfelder in eine Orthonormalbasis und berechnen Sie die Ausdrücke in Komponentendarstellung.