Ausgabe des Übungsblattes: 14.11.2016
Abgabe des Übungsblattes: 25.11.2016

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1: Partielle Ableitungen, Gradient, Divergenz und Rotation (9 Punkte = 2 + 2 + 2 + 3)

Betrachten Sie das skalare Feld

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \supset \mathcal{M}_3 \to \mathcal{N}_1 \subset \mathbb{R} \ , \quad \vec{r} \mapsto \varphi(\vec{r}) = xy + yz + zx \ ,$$

und das Vektorfeld

$$\vec{a} : \mathbb{R}^3 \supset \mathcal{M}_3 \to \mathcal{N}_3 \subset \mathbb{R}^3 \ , \quad \vec{r} \mapsto \vec{a}(\vec{r}) = x^2 y \vec{e}_1 + y^2 z \vec{e}_2 + z^2 x \vec{e}_3 \ .$$

(i) Berechnen Sie $\partial_x \varphi$, $\partial_y \varphi$, $\partial_z \varphi$, $\partial_x^2 \varphi$, $\partial_y^2 \varphi$, $\partial_z^2 \varphi$, $\partial_x \partial_y \varphi$, $\partial_x \partial_z \varphi$, $\partial_y \partial_z \varphi$, $\partial_y \partial_x \varphi$, $\partial_z \partial_x \varphi$ und $\partial_z \partial_y \varphi$.

(ii) Berechnen Sie $\vec{\nabla}\phi$ und $\vec{\nabla} \times \big(\vec{\nabla}\varphi\big)$.

(iii) Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{a}$ und $\vec{\nabla} \cdot \big(\vec{\nabla} \times \vec{a}\big)$.

(iv) Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \big(\varphi \vec{a}\big)$.

Aufgabe 4.2: Physikalische Anwendungen der Vektoranalysis (I): Hydrodynamik (8 Punkte = 3 + 5)

(i) Beschreibe $\vec{v} : \mathbb{R}^4 \supset \mathcal{M}_4 \to \mathcal{N}_3 \subset \mathbb{R}^3$, $(t, \vec{r}) \mapsto \vec{v}(t, \vec{r})$ die Strömungsgeschwindigkeit und $\rho : \mathbb{R}^4 \supset \mathcal{M}_4 \to \mathcal{N}_1 \subset \mathbb{R}$, $(t, \vec{r}) \mapsto \rho(t, \vec{r})$ das Dichtefeld einer kompressiblen Flüssigkeit. Dann gilt die sogenannte Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \big(\rho \vec{v}\big) = 0 \ .$$

Zeigen Sie, dass, wenn das Dichtefeld nicht explizit von t abhängt, folgende Gleichung gilt

$$v \frac{\partial \rho}{\partial \hat{v}} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \ ,$$

wobei die sogenannte Richtungsableitung eines skalaren Feldes ϕ in Richtung des Einheitsvektors $\hat{n}$ gemäß

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} = \hat{n} \cdot \vec{\nabla}\phi$$

definiert ist.

(ii) Die Strömungsgeschwindigkeit einer zweidimensionalen Flüssigkeit sei durch

$$\vec{v}(x, y) = v_1(x, y)\vec{e}_1 - v_2(x, y)\vec{e}_2$$

gegeben. Zeigen Sie, dass, wenn die Flüssigkeit inkompressibel ($\rho = const.$) und die Strömung wirbelfrei ist, die sogenannten Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gelten, d.h.

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{\partial v_2}{\partial x} \ .$$

Aufgabe 4.3: Physikalische Anwendungen der Vektoranalysis (II): klassische Elektrodynamik (13 Punkte = 4 + 3 + 4 + 2)

Betrachten Sie die Vektorfelder $\vec{E},\vec{B} : \mathbb{R}^4 \supset \mathcal{M}_4 \to \mathcal{N}_3 \subset \mathbb{R}^3$, $(t,\vec{r}) \mapsto \vec{E}(t,\vec{r}),\vec{B}(t,\vec{r})$. Hierbei wird $\vec{E}$ als elektrisches Feld und $\vec{B}$ als magnetisches Induktionsfeld bezeichnet. Im Vakuum erfüllen diese Vektorfelder die sogenannten Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \ , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \ , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\partial_t\vec{E} \ , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \ .$$

Die Größen ϵ_0 und μ_0 bezeichnet man als elektrische und magnetische Feldkonstanten.

(i) Erklären Sie die Bedeutung der Maxwell-Gleichungen.

(ii) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Induktionsfeld $\vec{B}$ im Vakuum der sogenannten homogenen Wellengleichung genügen, d.h. es gilt

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} - \Delta\vec{E} = 0 \ , \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} - \Delta\vec{B} = 0 \ ,$$

wobei $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$ gilt und c der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum entspricht.

Hinweis: Verwenden Sie Relation (ii) aus Aufgabe 3.3.

(iii) Das sogenannte Vektorpotential $\vec{A}$ eines magnetischen Dipolmoments $\vec{m}$ sei gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \ .$$

Zeigen Sie, dass das zum Vektorpotential $\vec{A}$ zugehörige magnetische Induktionsfeld $\vec{B}$ durch

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\,(\vec{m}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right)$$

gegeben ist, wobei das magnetische Dipolmoment als räumlich konstant angenommen wurde.

Hinweis: Aus einem gegebenen Vektorpotential $\vec{A}$ lässt sich das zugehörige magnetische Induktionsfeld $\vec{B}$ gemäß $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ berechnen.

(iv) Sei $\chi : \mathbb{R}^4 \supset \mathcal{M}_4 \to \mathcal{N}_1 \subset \mathbb{R}$, $(t,\vec{r}) \mapsto \chi(t,\vec{r})$ ein hinreichend oft stetig differenzierbares skalares Feld. Erklären Sie, warum das Vektorpotential

$$\vec{A}'(t,\vec{r}) = \vec{A}(t,\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(t,\vec{r})$$

zum gleichen magnetischen Induktionsfeld $\vec{B}$ führt wie $\vec{A}(t,\vec{r})$.

Hinweis: Verwenden Sie den Zusammenhang zwischen dem Vektorpotential und dem magnetischen Induktionsfeld.