
Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1: Rechnen mit Matrizen (I): Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks (9 Punkte = 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1)

Für ein gleichseitiges Dreieck existieren sechs Möglichkeiten, das Dreieck durch Spiegelung oder Drehung in sich selbst zu überführen. Diese Operationen bezeichnet man als die Symmetrietransformationen des gleichseitigen Dreiecks.

- (i) Erklären Sie anschaulich, um welche sechs Symmetrietransformationen es sich im Falle des gleichseitigen Dreiecks handelt.

Die Symmetrietransformationen des gleichseitigen Dreiecks lassen sich durch die folgenden (3×3) -Matrizen darstellen

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(r_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(r_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$D(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(p_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Ordnen Sie die obigen Matrizen den jeweiligen Symmetrietransformationen aus Aufgabenteil (i) zu.

Anleitung: Ordnen Sie den Ecken des Dreiecks die Bezeichnungen "a", "b" und "c" zu. Lassen Sie nun die obigen Matrizen auf den Vektor $\vec{D} = (a, b, c)^T$ wirken und interpretieren Sie die Resultate bzgl. der Ecken des gleichseitigen Dreiecks.

- (iii) Berechnen Sie alle möglichen Produkte der Matrizen $\{D(e), D(r_1), D(r_2)\}$.
(iv) Berechnen Sie die Inversen der Matrizen $D(r_1)$ und $D(p_1)$.
(v) Überprüfen Sie das Produkt der Matrizen $D(r_1)$ und $D(p_1)$ auf Kommutativität.
(vi) Berechnen Sie alle möglichen Produkte der Matrizen $\{D(e), D(p_1)\}$.

Aufgabe 5.2: Rechnen mit Matrizen (II): Drehungen in zwei und drei Dimensionen (21 Punkte = 6 + 7 + 8)

Wie bereits in der Vorlesung gesehen, bilden die sogenannten eigentlichen Drehungen in n Dimensionen die Gruppe der speziellen orthogonalen $(n \times n)$ -Matrizen $SO(n)$. Im Folgenden sollen Sie die Eigenschaften dieser Drehungen für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ genauer untersuchen.

- (i) Gruppeneigenschaften von $SO(n)$ (6 Punkte = 2 + 2 + 1 + 1):
- (a) Zeigen Sie zunächst, dass für $(n \times n)$ -Matrizen im Allgemeinen $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ und $(AB)^T = B^T A^T$ gilt.
(b) Zeigen Sie, dass, falls O_1 und O_2 orthogonale $(n \times n)$ -Matrizen sind, auch $O_1 O_2$ eine orthogonale $(n \times n)$ -Matrix ist. Zeigen Sie darüber hinaus, dass, falls $\det(O_1) = \det(O_2) = 1$ gilt, auch $\det(O_1 O_2) = 1$ gilt.

Anleitung: Verwenden Sie die Resultate aus (a), sowie die Rechenregeln für Determinanten.

- (c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_n$ eine orthogonale Matrix ist und dass $\det(\mathbb{1}_n) = 1$ ist, wobei $\mathbb{1}_n$ die n -dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.
- (d) Zeigen Sie, dass, falls O_1 eine orthogonale $(n \times n)$ -Matrix ist, auch $(O_1)^{-1}$ eine orthogonale $(n \times n)$ -Matrix ist. Zeigen Sie darüber hinaus, dass, falls $\det(O_1) = 1$ gilt, auch $\det[(O_1)^{-1}] = 1$ gilt.

Anleitung: Verwenden Sie die Resultate aus (a), sowie die Rechenregeln für Determinanten.

(ii) Drehungen um eine feste Achse (7 Punkte = 2 + 3 + 1):

- (a) In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie man die Drehmatrix $D(\phi)$ für eine Drehung um den Winkel ϕ um die z -Achse herleitet. Zeigen Sie, dass $D(\phi)D(\psi) = D(\phi+\psi)$, $D(0) = \mathbb{1}_3$, $[D(\phi)]^{-1} = D(-\phi)$ und $D(\phi)D(\psi) = D(\psi)D(\phi)$ gilt.
- (b) Leiten Sie Drehmatrizen für Drehungen um die x - und die y -Achse her.

Anleitung: Wiederholen Sie die Schritte, die im Skript vorgeführt wurden, um die Drehung $D(\phi)$ um die z -Achse herzuleiten.

- (c) Zeigen Sie, dass Drehungen um verschiedene Achsen im Allgemeinen nicht kommutieren.

(iii) Die 2-Sphäre (8 Punkte = 2 + 1 + 3 + 2):

Die Oberfläche einer 3-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet man als 2-Sphäre, S^2 , und definiert sie als Menge aller dreidimensionalen Vektoren vom Betrag 1,

$$S^2 = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r}|^2 = 1 \} .$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_3 \vec{r} = \vec{r}$ und $(O_1 O_2) \vec{r} = O_1 (O_2 \vec{r})$ gilt, wobei $O_1, O_2 \in SO(3)$.
- (b) Zeigen Sie, dass eigentliche Drehungen die Länge von Vektoren nicht ändern.

Anleitung: Zeigen Sie hierzu, dass sich das Betragsquadrat eines Vektors $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ nicht ändert, wenn der Vektor durch eine Matrix $O \in SO(3)$ gedreht wird.

- (c) Zeigen Sie, dass man ausgehend von einem beliebigen Punkt auf S^2 jeden anderen Punkt auf S^2 durch eine eigentliche Drehung erreichen kann, d.h.

$$\vec{r} = O \vec{r}_0 ,$$

wobei $\vec{r}, \vec{r}_0 \in S^2$, $O \in SO(3)$.

Anleitung: Wählen Sie $\vec{r}_0 = (1, 0, 0)^T$. Wählen Sie zwei orthonormale Vektoren \tilde{e}_1 und \tilde{e}_2 so, dass $\{ \vec{r}, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \}$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 bildet. Verwenden Sie nun die im Skript beschriebenen Eigenschaften orthogonaler Matrizen, um eine orthogonale Matrix O gerade so zu konstruieren, dass der Vektor \vec{r}_0 in den Vektor $\vec{r} = (x, y, z)^T$ überführt wird. Zeigen Sie abschließend, dass für diese Matrix $\det(O) = 1$ gilt.

- (d) Betrachten Sie die folgende spezielle orthogonale Matrix $H \in SO(3)$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & \\ 0 & & \end{pmatrix} ,$$

wobei $h \in SO(2)$ eine spezielle orthogonale (2×2) -Matrix ist. Zeigen Sie, dass diese Matrix den Vektor $\vec{r}_0 = (1, 0, 0)^T$ unberührt lässt, d.h., dass $H \vec{r}_0 = \vec{r}_0$ gilt. Zeigen Sie weiterhin, dass die Matrix OHO^{-1} jeden beliebigen Vektor $\vec{r} \in S^2$ unberührt lässt, wobei $O \in SO(3)$ ist.