Theoretische Physik I: Mathematische Methoden,
Wintersemester 2016/2017,
Prof. Dr. Dirk H. Rischke

Ausgabe des Übungsblattes: 19.12.2016
Abgabe des Übungsblattes: 13.01.2017

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1: Punktteilchen auf Schraubenlinie (9 Punkte = 1 + 2 + 4 + 2)

Ein Punktteilchen der Masse m gleite unter dem Einfluß der Schwerkraft reibungsfrei entlang der Kurve

$$\vec{r}(t) = \big(R\cos[\phi(t)], R\sin[\phi(t)], b\phi(t)\big)^T \ ,$$

wobei R und b positive reelle Konstanten sind, $R, b \in \mathbb{R}^+$. Die Position des Punktteilchens auf der Schraubenlinie wird durch den Winkel $\phi(t)$ eindeutig festgelegt.

(i) Welche Komponente der Schwerkraft wirkt beschleunigend auf das Punktteilchen?

(ii) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung auf der Kurve $\vec{r}(t)$.

(iii) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für den Winkel $\phi(t)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Resultate aus den Aufgabenteilen (i) und (ii).

(iv) Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für den Winkel $\phi(t)$ für die Anfangsbedingungen $\phi(t=0) = \phi_0$ und $\dot{\phi}(t=0) = \dot{\phi}_0$.

Aufgabe 9.2: Zykloidenbahnen (13 Punkte = 5 + 2 + 4 + 2)

Ein dünnwandiger Hohlzylinder mit Radius R rolle mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung. Die Geschwindigkeit seines Schwerpunktes S sei durch $\vec{v}_S = (v, 0, 0)^T$, $v = const.$, gegeben. Betrachten Sie den Punkt P, der den Endpunkt einer relativ zum Zylinder festen Strecke der Länge a darstellt, die P mit dem Schwerpunkt S des Zylinders verbindet, vgl. Abbildung 1. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Punkt Q im Koordinatenursprung.

(i) Bestimmen Sie die Trajektorie $\vec{r}(t)$ des Punktes P.

(ii) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$ des Punktes P.

(iii) Zu welchen Zeiten ist der Betrag der Geschwindigkeit $\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|$ maximal bzw. minimal?

(iv) Berechnen Sie die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}(t)$ des Punktes P.

Zeichnen Sie für jeden Aufgabenteil die jeweiligen Parameterkurven für die Fälle $a < R$, $a = R$ und $a > R$ und diskutieren Sie deren qualitativen Verlauf.

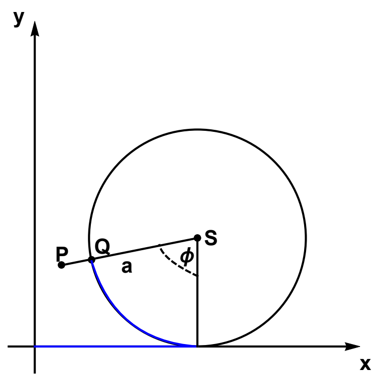

Abbildung 1: Rollender Hohlzylinder.

Aufgabe 9.3: Freier Fall (12 Punkte)

Auf einem ebenen Platz in Mitteleuropa (geographische Breite $\phi_0 = 50°$) befindet sich ein Turm der Höhe $h = 200$ m. Der Platz stelle die (x', y')-Ebene, der Turm zeige in Richtung der z'-Achse. Berechnen Sie in diesem Koordinatensystem, wie weit ein von Turm fallender Körper neben dem Turm aufschlägt. Verifizieren Sie das Ergebnis, indem Sie den freien Fall in einem Inertialsystem behandeln.

Anleitung: Zeigen Sie, dass die Relativbeschleunigung der beiden Koordinatensysteme $\ddot{\vec{r}}_0$ von der Ordnung ω^2 (ω bezeichnet die Erdrotationsfrequenz.) ist und vernachlässigen Sie alle Terme der Ordnung ω^2. Warum macht diese Näherung Sinn? Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für die x'-, y'- und z'-Komponente und entkoppeln Sie das Gleichungssystem, indem Sie Terme $\sim \omega$ gegen Terme $\sim g$ vernachlässigen.

Aufgabe 9.4: Kater Mikesch (9 Punkte = 1 + 3 + 2 + 2 + 1)

Florian möchte seinen Kater Mikesch zum Tierarzt bringen. In weiser Voraussicht ist dieser aber bereits auf einen Baum geflüchtet. Florian befindet sich im Abstand d vom Baum entfernt und möchte seinen Kater mit Hilfe eines gezielten Schusses aus einem Narkosegewehr vom Baum holen. Der Lauf befindet sich in der Höhe h über dem Erdboden, während der Kater auf einem Ast in der Höhe $h + H$ verweilt. Da Florian in seiner Mechanik-Vorlesung nicht aufgepasst hat, zielt er genau seinen Kater, ohne zu bedenken, dass der Narkosepfeil aufgrund der Schwerkraft nicht in einer geraden Linie fliegen wird. Mikesch möchte besonders clever sein und lässt sich genau in jenem Moment vom Ast fallen, in dem der Pfeil den Gewehrlauf verlässt.

(i) Fertigen Sie eine Zeichnung der oben beschriebenen Situation an.

(ii) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für den Pfeil und den Kater unter Vernachlässigung der Luftreibung.

(iii) Zeigen Sie, dass es möglich ist, dass Florian den Kater tatsächlich trifft.

(iv) Zeigen Sie, dass eine Mindestanfangsgeschwindigkeit des Pfeils existiert, für die der Kater immer getroffen wird.

(v) In welcher Höhe wird der Kater vom Pfeil getroffen?

Aufgabe 9.5: Schießen mit Luftreibung (17 Punkte = 8 + 2 + 4 + 3)

Ein Flugzeug bewege sich in einer Höhe h mit der Geschwindigkeit v_F in x-Richtung parallel zur Erdoberfläche. Aus dem Flugzeug wird eine Gewehrkugel mit der Relativgeschwindigkeit v_K abgeschossen. Der Vektor $\vec{v}_K$ liegt in der (x, z)-Ebene und hat einen positiven Winkel θ zur x-Achse. Die Gewehrkugel bewegt sich unter dem Einfluss Stokesscher Reibung mit dem Reibungskoeffizienten α_S.

(i) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung der Gewehrkugel und lösen Sie diese.

(ii) Geben Sie diejenigen Relationen an, die die Zeitpunkte t_h und t_b bestimmen, an denen die Gewehrkugel erneut die Höhe h bzw. den Erdboden erreicht.

(iii) Unter welcher Bedingung trifft die Gewehrkugel das Flugzeug? Zeigen Sie, dass der Abschusswinkel der Gewehrkugel, im Falle eines Treffers, als Funktion der Masse m des Projektils, des Reibungskoeffizienten α_S, der Geschwindigkeit des Flugzeugs v_F und des Betrages der Erdbeschleunigung g angegeben werden kann.

(iv) Skizzieren Sie die Trajektorie der Gewehrkugel in der (x, z)-Ebene für verschiedene Werte des Reibungskoeffizienten α_S.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!