Theoretische Physik I: Mathematische Methoden,
Wintersemester 2016/2017, 17.10.2016
Prof. Dr. Dirk H. Rischke

Musterlösung: Mathematik-Test

Aufgabe 1: Bruchrechnung

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und kürzen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich.

$$(1) \qquad \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\right]^2 ,$$

$$(2) \qquad \left(5+\frac{3}{4}\right)+\frac{0.2}{\frac{15}{4}-\left(3+\frac{1}{2}\right)} .$$

$$(1) \qquad \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\right]^2 = \left(\frac{3}{24}\right)^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64} ,$$

$$(2) \qquad \left(5+\frac{3}{4}\right)+\frac{0.2}{\frac{15}{4}-\left(3+\frac{1}{2}\right)} = \frac{23}{4}+\frac{4}{5} = \frac{131}{20} .$$

Aufgabe 2: Gewöhnliche Gleichungen und Lineare Gleichungssysteme

(i) Betrachten Sie eine Menge gleichartiger Ziegelsteine. Ein Ziegelstein wiege 1 Kilogramm plus die Hälfte eines anderen Steines. Wieviel Kilogramm wiegt ein Ziegelstein?

(ii) Lösen Sie nach x auf

$$\frac{x}{x-2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2x-4} .$$

Zu (i): Beschreibe x die Masse eines Ziegelsteins. Dann gilt

$$x = 1+\frac{x}{2} ,$$

so dass die Masse des Ziegelsteins $x = 2$ Kilogramm entspricht.

Zu (ii): Wir multiplizieren die komplette Gleichung mit $x-2$. Dann ergibt sich

$$x-\frac{1}{2}(x-2)=\frac{3}{2} ,$$

so dass letztendlich $x = 1$ ist.

Aufgabe 3: Differential- und Integralrechnung

(i) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$(1) \qquad f(x) = x^2\cos(x) , \qquad\qquad (2) \qquad f(x) = \frac{3x}{2}(1-4x)^2 ,$$

$$(3) \qquad f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} , \qquad\qquad (4) \qquad f(x) = e^{\cos(2x)} .$$

(ii) Bestimmen Sie die Stammfunktion der folgenden Funktionen

$$(1) \qquad f(x) = (4+2x)^2 \ , \qquad (2) \qquad f(x) = 4\cos(2x) \ ,$$
$$(3) \qquad f(x) = 6x\, e^{2x-1} \ .$$

(iii) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} \ ,$$

wobei $A, B \neq 0$ reellwertige Konstanten sind.

Zu (i):

$$(1) \qquad f'(x) = 2x\cos(x) + x^2(-1)\sin(x) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x) \ ,$$
$$(2) \qquad f'(x) = \frac{3}{2}(1-4x)^2 + \frac{3x}{2}(-4)2(1-4x) = \frac{3}{2}(1-4x)(1-12x) \ ,$$
$$(3) \qquad f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - (-2x)x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2} \ ,$$
$$(4) \qquad f'(x) = -2\sin(2x)e^{\cos(2x)} \ ,$$

wobei wir die üblichen Ableitungsregeln (Produkt-, Quotienten- und Kettenregel) verwendet haben.

Zu (ii):

$$(1) \qquad \int \mathrm{d}x \ (4+2x)^2 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}u \ u^2 = \frac{1}{6}(4+2x)^3 + C \ ,$$
$$(2) \qquad \int \mathrm{d}x \ 4\cos(2x) = 2\int \mathrm{d}u \ \cos(u) = 2\sin(2x) + C \ ,$$
$$(3) \qquad \int \mathrm{d}x \ 6x\, e^{2x-1} = \frac{1}{2}e^{2x-1}6x + C_1 - \int \mathrm{d}x \ 3e^{2x-1} = 3x\, e^{2x-1} + C_1 - \left(\frac{3}{2}e^{2x-1} + C_2\right)$$
$$= \frac{3}{2}(2x-1)e^{2x-1} + C \ , \text{ mit } \quad C = C_1 - C_2 \ ,$$

wobei wir in (1) und (2) jeweils die innere Funktion durch eine Funktion $u(x)$ substituiert haben, dann gemäß $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u$ integriert haben und abschließend eine Integrationskonstante C angehängt haben. In (3) haben wir einmal partiell integriert und die dabei entstehenden Integrationskonstanten zusammengefasst.

Zu (iii): Hier empfiehlt es sich analog zu (ii.1) und (ii.2) die innere Funktion durch eine Funktion $u(x)$ zu substituieren. Man erhält

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \frac{1}{A-B}\int_B^A \mathrm{d}u \ u^{-2} \ ,$$

wobei sich die Integrationsgrenzen durch die obige Substitution gemäß $u(0) = B, u(1) = A$ geändert haben. Der Vorfaktor des Integrals entsteht durch die Substitution gemäß $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u$, mit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{A-B}$. Abschließend integrieren wir den obigen Ausdruck nun, so dass

$$\frac{1}{A-B}\int_B^A \mathrm{d}u \ u^{-2} = -\frac{1}{A-B}u^{-1}\Big|_B^A = -\frac{1}{A-B}\,\frac{B-A}{AB} = \frac{1}{AB}$$

gilt.
