Probeklausur

Theoretische Physik I: Mathematische Methoden

Wintersemester 2016/2017

Name : ______________________________

Vorname : ______________________________

Geburtsdatum : ______________________________

Matrikelnummer : ______________________________

- Bitte lösen Sie die Aufgaben 1 und 2 auf **separaten** Blättern.
- Bitte schreiben Sie Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer** auf jedes Blatt, das Sie zur Bearbeitung der Klausur verwenden.
- Bei der Bearbeitung der Klausur kann eine Gesamtpunktzahl von 60 Punkten erreicht werden.

Aufgabe	**Punktzahl**
1.i)	/ 14
1.ii)	/ 16
2.i)	/ 12.5
2.ii)	/ 17.5
Gesamtpunktzahl	/ 60

Aufgabe 1: Mathematische Methoden (30 Punkte = 14 + 16)

(i) Theorieteil (14 Punkte = 3 + 2 + 4 + 2 + 3)

(a) Definieren Sie einen Vektorraum V. Zeigen Sie am Beispiel von $V = \mathbb{R}^2$ explizit, dass die Vektoraddition assoziativ ist.

(b) Geben Sie die Definition des Levi-Cività-Symbols an und zeigen Sie, dass

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \ ,$$

für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

(c) Sei $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \vec{r}(t)$ eine hinreichend oft stetig differenzierbare Raumkurve. Was versteht man unter dem Begriff "begleitendes Dreibein"? Geben Sie die Definition des Tangential-, Normalen- und Binormalenvektors der Raumkurve $\vec{r}$ in ihrer natürlichen Parametrisierung an. Wie lauten die Frenetschen Formeln?

(d) Sei $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r} \mapsto \vec{A}(\vec{r})$ ein hinreichend oft stetig differenzierbares Vektorfeld. Was versteht man unter dem Begriff "Höhenlinie" im Zusammenhang des Vektorfeldes $\vec{A}$? Zeigen Sie, dass

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})\right] = 0$$

gilt.

(e) Bestimmen Sie die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ).

(ii) Rechenteil (16 Punkte = 2 + 3 + 5 + 6)

Betrachten Sie die Raumkurve $\vec{r}$, welche durch die folgende Abbildungsvorschrift definiert ist

$$\vec{r} : \mathbb{R} \supset [t_a = 0, t_e] \to \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3 \ , \qquad t \mapsto \vec{r}(t) = \left(t, \frac{2}{5}t^5, \frac{2}{3}t^3 \right) \ .$$

(a) Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(t)$, mit $s(t = 0) = 0$.

(b) Bestimmen Sie den Tangentialvektor $\hat{t}$ als Funktion des Kurvenparameters t.

(c) Zeigen Sie, dass die Krümmung κ als Funktion des Kurvenparameters t durch

$$\kappa(t) = \frac{4t}{(1 + 2t^4)^2}$$

gegeben ist.

(d) Bestimmen Sie den Normalenvektor $\hat{n}$ und den Binormalenvektor $\hat{b}$ jeweils als Funktion des Kurvenparameters t.

Aufgabe 2: Mechanik der Punktteilchensysteme (30 Punkte = 12.5 + 17.5)

(i) Theorieteil (12.5 Punkte = 2 + 3 + 3 + 3 + 1.5)

(a) Geben Sie die Newtonschen Axiome an.

(b) Geben Sie diejenige aufzuwendende Arbeit an, die notwendig ist, um ein Punktteilchen in einem beliebigen Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ vom Punkt $\vec{r}_1$ zum Punkt $\vec{r}_2$ zu verschieben. Von welchen Faktoren hängt der resultierende Ausdruck im Allgemeinen ab?

(c) Was versteht man unter einer konservativen Kraft? Handelt es sich bei Reibungskräften um konservative Kräfte?

(d) Sei $\vec{F}(\vec{r})$ ein konservatives Kraftfeld. Wie lautet der Zusammenhang dieses Kraftfeldes mit dem Potential $V(\vec{r})$? Zeigen Sie, dass die im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ geleistete Arbeit wegunabhängig ist.

(e) Wie lauten die Keplerschen Gesetze?

(ii) Rechenteil (17.5 Punkte = 3 + 5 + 5 + 3 + 1.5)

Gegeben sei ein Kraftfeld der Form

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \ , \quad \vec{r} \mapsto -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r \ ,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

(a) Berechnen Sie

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) \ .$$

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\vec{F}$ entlang des Weges $\mathscr{C}_1$, wobei der Weg durch

$$\mathscr{C}_1 : (a, 0, a) \to (3a, 0, a) \to (3a, 2a, a) \ , \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ ,$$

gegeben ist.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\vec{F}$ entlang des Weges $\mathscr{C}_2$, wobei der Weg durch

$$\mathscr{C}_2 : (a, 0, a) \to (a, 2a, a) \to (3a, 2a, a) \ , \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ ,$$

gegeben ist.

Hinweis: Für die Aufgabenteile (b) und (c) kann sich das folgende Integral als nützlich erweisen,

$$\int \mathrm{d}x \ \frac{x}{\sqrt{x^2 + k}^3} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} + C \ ,$$

wobei $k, C \in \mathbb{R}$ gilt.

(d) Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang eines Einheitskreises in der (x, y)-Ebene.

(e) Finden Sie ein skalares Feld $\varphi(\vec{r})$, so dass

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) \ .$$

Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus (a) sowie die Tatsache, dass für ein skalares Feld $\varphi(r)$, das nur vom Betrag des Ortsvektors abhängt, der folgende Zusammenhang gilt

$$\vec{\nabla}\varphi(r) = \frac{\mathrm{d}\varphi(r)}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r \ .$$
