# THEORETIKUM ZUR MATHEMATIK FÜR BIOPHYSIKER SS 2012

**Aufgabenblatt 10** **Datum: 29/06/2012. Abgabe: 06/07/2012**

*Aufgabe 1: Explizite Rechnung mit Matrizen* (8 Punkte = 0.5 + 0.5 + 2 + 2 + 1 + 1 +1)

Gegeben seien die 2 reellen $2 \times 2$ Matrizen $A$ und $B$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} . \tag{1}$$

1. Wie lauten $\det A$, $TrA$ und $A^t$?
2. Wie lautet der explizite Ausdruck für $A^{-1}$? Verifizieren Sie, dass $A^{-1}A = AA^{-1} = 1_2$.
3. Zeigen Sie durch eine explizite Rechnung, dass:
$$Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B) \ , \tag{2}$$
$$Tr(A^t) = Tr(A) \ , \tag{3}$$
$$Tr(AB) = Tr(BA) \ , \tag{4}$$
$$Tr(AB) \neq Tr(A)Tr(B) \ !!! \tag{5}$$
4. Zeigen Sie durch eine explizite Rechnung, dass:
$$\det(A^t) = \det(A) \ , \tag{6}$$
$$\det(AB) = \det A \det B \ , \tag{7}$$
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \ , \tag{8}$$
$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B) \ !!! \tag{9}$$
5. Zeigen Sie, dass im allgemeinsten Fall
$$AB \neq BA \ . \tag{10}$$
6. Zeigen Sie, dass
$$(AB)^t = B^t A^t \ . \tag{11}$$
7. Zeigen Sie, dass
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{12}$$
wobei $A^{-1}A = AA^{-1} = 1_2$ und $B^{-1}B = BB^{-1} = 1_2$.

Zugegeben: diese Aufgabe ist nicht wirklich spannend. Aber es ist sehr hilfreich, zumindest einmal im Leben diese expliziten Rechnungen gemacht zu haben!

*Aufgabe 2: Eigenwerte und Drehungsmatrix* ( 14 Punkte = 1 + 2 + 1 + 2 + 3 + 3 + 2)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} . \tag{13}$$

1. Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1$ und $\lambda_2$. Sei per Konvention $\lambda_1 < \lambda_2$ .

2. Berechnen Sie die Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_1^{(2)} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v_2^{(1)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} . \tag{14}$$

   Sei $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = 1$.

3. Verifizieren Sie, dass

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1^t \vec{v}_2 = 0. \tag{15}$$

4. Bilden Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & v_2^{(1)} \\ v_1^{(2)} & v_2^{(2)} \end{pmatrix} . \tag{16}$$

   Verifizieren Sie, dass

$$BB^t = B^t B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{17}$$

   Das bedeutet, dass $B$ eine orthogonale Matrix ist. Berechnen Sie auch $\det B$.

5. Berechnen Sie

$$B^t A B . \tag{18}$$

   Warum ist das Resultat erwartet?

6. Zeigen Sie, dass

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \text{ und } TrA = \lambda_1 + \lambda_2 . \tag{19}$$

   Warum gelten diese Gleichungen?

7. Berechen Sie die Matrix

$$M = BD^{-1}B^t \tag{20}$$

   wobei $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Berechen Sie dann $MA$. Ist das Resultat erwartet?

*Aufgabe 3: $SO(2)$ in Exponentialform* (5 Punkte )

Beweisen Sie, dass

$$e^{\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{21}$$

indem sie eine Taylor-Entwicklung bis zur Ordnung $\infty$ durchführen.
**Hinweis:** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2n} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*Aufgabe 4: System* (3 Punkte )

Lösen Sie das folgende lineare System von Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

**Hinweis:** benutzen Sie die Cramersche Regel.