THEORETIKUM ZUR MATHEMATIK FÜR BIOPHYSIKER SS 2012

Aufgabenblatt 5 **Datum: 25/05/2012. Abgabe: 1/06/2012**

Aufgabe 1: Grenzwerte und Ableitungen (7 Punkte = 2 + 1 + 2 + 2)

1. Gegeben sei die Funktion
$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^5 + y^5} \ . \tag{1}$$
Beweisen Sie, dass der Limes
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \tag{2}$$
nicht existiert.

2. Gegeben sei die Funktion
$$f(x,y) = \ln(x^2 - y) \ . \tag{3}$$
Bestimmen und zeichnen Sie den Definitionsbereich R diseser Funktion.

3. Bestimmen Sie
$$\frac{\partial f}{\partial x} \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{4}$$
für die Funktion $f(x,y) = \ln(x^2 - y)$.

4. Gegeben sei die Funktion
$$f(x,y) = x^\alpha y^\beta \ , \tag{5}$$
wobei $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Bestimmen Sie $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Zeigen Sie, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Aufgabe 2: W Mexico (7 Punkte = 2 + 5 + 0)

Gegeben sei die Funktion
$$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 \ . \tag{6}$$

1. Bestimmen Sie die Punkte in der xy-Ebene, die die Gleichung
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{7}$$
erfüllen.

2. Bestimmen Sie die Tangentialvektoren $\vec{T}_1$ und $\vec{T}_2$ (mit Länge 1) an der Fläche $(x, y, f(x,y))$ für die folgenden Punkte:
$$(0,0) \ , \ (1,0), \ (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \ , \ (1,1) \tag{8}$$

3. Zeichnen Sie die Funktion $f(x,y)$. Gibt es etwas 'mexikanisches'?

Aufgabe 3: Fest im Sattel? (6 Punkte = 1 + 1 + 4)

Gegeben sei die Funktion
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \alpha xy \tag{9}$$
wobei α eine reelle Zahl ist.

1. Verifizieren Sie, dass $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)=(0,0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)=(0,0)} = 0$.

2. Bestimmen Sie die sogenannte Hesse-Matrix für den Punkt $(x, y) = (0, 0)$.

   Zur Erinnerung: die Hesse-Matrix lautet

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} . \tag{10}$$

3. Für welche Werte von α ist der Punkt $(x, y) = (0, 0)$ ein Minimum für die Funktion $f(x, y)$? Für welche Werte von α ist der Punkt $(x, y) = (0, 0)$ ein Sattelpunkt für die Funktion $f(x, y)$? Zur Erinnerung: die Eigenwerte der Hesse-Matrix sind alle positiv, wenn es sich um ein Minimum handelt. Hingegen, wenn manche Eigenwerte positiv und andere negativ sind, hat man einen sogennaten Sattelpunkt.