THEORETIKUM ZUR MATHEMATIK FÜR BIOPHYSIKER SS 2012

Aufgabenblatt 6 **Datum: 1/06/2012. Abgabe: 8/06/2012**

Aufgabe 1: Theoretisch-geometrische Aufgaben (10 Punkte = 2 + 2 + 2 + 2 + 2)

1. Gegeben seien 2 zwei Vektoren $\vec{x}_1 = (x_1, y_1)$ und $\vec{x}_2 = (x_2, y_2)$. Das Skalarprodukt ist definiert durch
$$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 \ . \tag{1}$$
Beweisen Sie, dass
$$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = |\vec{x}_1|\,|\vec{x}_2| \cos\theta \ , \tag{2}$$
wobei θ der Wnkel zwischen den zwei Vektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ ist.

2. Gegeben sei die Funktion $f(x) : R \to R$. Bestimmen Sie den Tangentialvektor $\vec{T}$ mit Länge 1 an der Kurve $(x, f(x))$ für den Punkt $(x, y(x))$. Bestimmen Sie auch den Normalvektor $\vec{N}$ mit Länge 1. ($\vec{N}$ ist orthogonal zu $\vec{T}$).

3. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) : R^2 \to R$. An einem Punkt $(x, y, f(x, y))$ gibt es (wie bereits in der Vorlesung besprochen) zwei Tangentialvektoren $\vec{T}_1$ und $\vec{T}_2$ mit Länge 1 an der Fläche. Bestimmen sie den Normalvektor $\vec{N}$ mit Länge 1, der orthogonal zu der Fläche steht. Hinweis: $\vec{N}$ ist orthogonal zu $\vec{T}_1$ und $\vec{T}_2$.

4. Gegeben sei die Funktion $f(x, y)$. Sei nun $f(x_0, y_0) = z_0$. Betrachten Sie die Kurve K, die durch die Punkte in der (x, y)-Ebene, die die Gleichung $f(x, y) = z_0$ lösen, definiert ist. Per Konstruktion gehört der Punkt (x_0, y_0) dieser Kurve an. Zeigen Sie, dass der Gradient-Vektor $\vec{\nabla} f = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0, y=y_0}, \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0, y=y_0} \right)$ orthogonal zu der Kurve K steht. Hinweis: man kann zumindest einen Teil der Kurve K als Funktion $y = y(x)$ ausdrücken. Es muss dann $f(x, y(x)) = z_0 = const$ gelten.

5. Gegeben seien die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ und der Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Bestimmen und zeichnen Sie die Kurve $K = \{(x, y),$ so dass $f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$. Berechnen Sie den Vektor $\left(\vec{\nabla} f\right)_{(x_0, y_0)}$ und zeigen Sie, dass dieser Vektor orthogonal zu der Kurve K steht.

Aufgabe 2: Maxima-Minima (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion
$$f(x, y) = xy - x + 1 \tag{3}$$
und die Randbedingung $K = \{(x(t) = 2\cos t, y(t) = \sin t),\ 0 \leq t < 2\pi\}$. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f(x, y)$ mit Randbedingung K. Spezifizieren Sie auch, ob es sich um Minima oder Maxima handelt.

Aufgabe 3: 2D-Integrale (5 Punkte = 3 + 2)

Gegeben sei die Funktion
$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 \ . \tag{4}$$
Berechnen Sie die folgende Integrale:

1. $$\int_V dxdy f(x, y) \tag{5}$$
wobei $V = \{(x, y) : x^2 < 1 \ , \ 0 < y < 1\}$.

2.
$$\int_C dxdyf(x,y) \tag{6}$$
wobei $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Hinweis: benutzen Sie Polarkoordinaten.